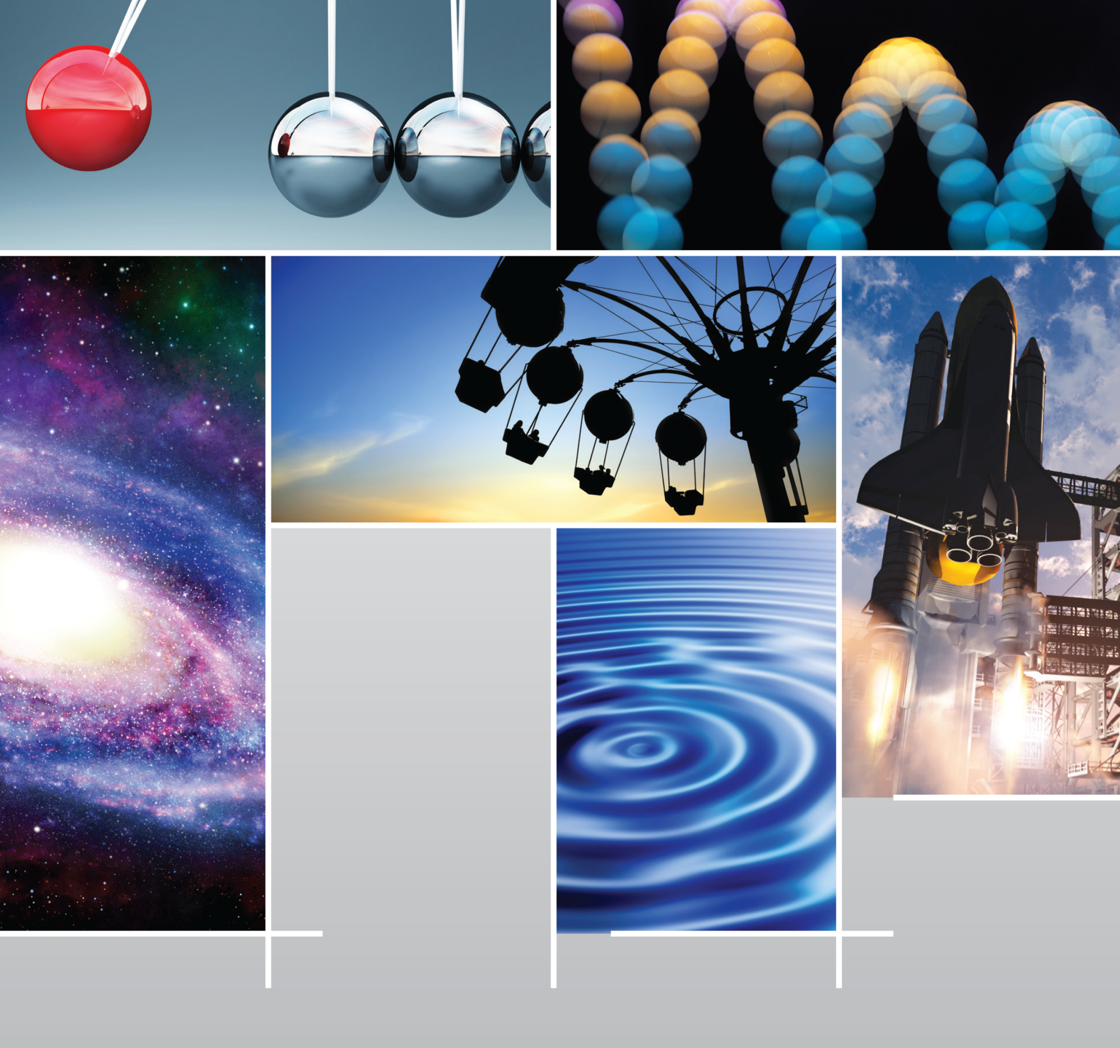


الميكانيكا الكلاسيكية

مقدمة أساسية

مايكل كوهين

الميكانيكا الكلاسيكية

الميكانيكا الكلاسيكية

مقدمة أساسية

تأليف
مايكل كوهين

ترجمة
محمد أحمد فؤاد باشا

مراجعة
أحمد فؤاد باشا



الميكانيكا الكلاسيكية

مايكل كوهين

Classical Mechanics

Michael Cohen

رقم إيداع ٩١٧٥ / ٢٠١٤
تدمك: ٠ ٨٣٧ ٧١٩ ٩٧٧ ٩٧٨

مؤسسة هنداوي للتعليم والثقافة

٥٤ عمارات الفتح، حي السفارات، مدينة نصر ١١٤٧١، القاهرة
جمهورية مصر العربية
تليفون: ٢٢٧٠٦٣٥٢ ٢٠٢ + **فاكس:** ٣٥٣٦٥٨٥٣ ٢٠٢ +
البريد الإلكتروني: hindawi@hindawi.org
الموقع الإلكتروني: http://www.hindawi.org

تصميم الغلاف: إيهاب سالم.

المحتويات

عجبًا، يمكن لطفل في الرابعة من عمره أن يفهم هذا! ...
فلْتخرُجْ وتأتِنِي إذن بطفل في الرابعة من عمره.

جروشو

مقدمة منقحة للمؤلف (يناير ٢٠١٣)

إن أيًّا ممن درَّسوا منهج الميكانيكا التمهيدية «النموذجي» أكثر من بضع مرات يكون قد بلْوَرَ في الغالب بعض الأفكار المحددة بصورة كافية حول كيفية عرض المفاهيم الأساسية، وحدَّد — إن صوابًا أو خطأً — مصادر الصعوبة الأكثر شيوعًا بالنسبة للطالب. كما أن عددًا متزايدًا من المهتمِّين جديًّا بعلم أصول تدريس الفيزياء قد شككوا في جدوى وفاعلية التقليد المتمثل في وقوف الأستاذ في حجرة يحاضر الطلاب الذين «قد» يستمعون إليه. لا أتخذ أيَّ موقف محدد بشأن هذه المسألة، ولكني أعتقد أن الكتاب لا يزال محتفظًا بقيمته التعليمية التربوية.

أَلَّفتُ المسوَّدة الأولى من هذا الكتاب منذ سنوات عِدَّة، وكان الهدف منها إما أن تكون نصًّا مستقلًّا أو «تدريبًا» إضافيًّا للطالب. وكان الدافع المباشر عندي هو الاعتقاد أن معظم المقرَّرات تنتقل بعجلة عبر المفاهيم الأساسية، وأن المناقشة الأكثر هدوءًا ورَوِيَّةً ستكون مفيدة لكثير من الطلاب. وأرجأتُ المشروع عندما بدَا لي أن الناشرين مهتمُّون أساسًا بالكتب الدراسية كثيفة المادة التي تغطي كلَّ فيزياء السنة الأولى.

أما وقد صار من الممكن الآن إتاحةُ هذه المادة على الإنترنت للطلاب في جامعة بنسلفانيا أو في أي مكان أخر، فإنني قمت بإحياء المشروع وإعداده من جديدٍ، مع رجاء أن يكون العمل الناتج مفيدًا لبعض القُرَّاء. وإني لأدين بشكر خاص للأستاذ الجامعي لاري جلادني الذي ترجم النص العتيق إلى صياغة رقمية حديثة، كما أعدَّ دليلًا لحلول المسائل في نهاية كل فصل، خاصة وأنه مؤلِّف العديد من هذه المسائل. هذا الدليل سيكون على الإنترنت، ولكن الطالب الجادَّ عليه أن يُنشئ حلوله الخاصة قبل قراءة مناقشة الأستاذ جلادني. كانت المحادثات مع زميلي دفيد بالاموث مفيدة، لكني لا أستطيع أن ألوم إلا

نفسي فقط على الأخطاء والعيوب. وقد حرَّرتني المناقشة التنويرية مع البروفسور باول سوفن من الاعتقاد الخاطئ بأن قانون نيوتن الأول ليس إلا حالة خاصة من القانون الثاني.

مايكل كوهين، قسم الفيزياء والفلك، جامعة بنسلفانيا، فيلادلفيا

تمهيد

تُعنى الميكانيكا الكلاسيكية ببحث كيفية تحرُّك الجسم عند تعرُّضه لقوى مختلفة، وتُعنى أيضًا بقضية القُوَى المؤثرة على الجسم غير المتحرك.

وكلمة «كلاسيكية» تشير إلى أننا لا نناقش الظواهر التي تحدث على المستوى الذري، ولا نناقش الحالات التي يتحرك فيها جسم ما بسرعة عالية تُقارب سرعة الضوء؛ ذلك أن وصف الظواهر الذَّرِّيَّة يتطلب ميكانيكا الكم، ووصف الظواهر التي تحدث عند سرعات عالية جدًّا يتطلب نظرية النسبية لأينشتاين. وقد اكتُشفت كلٌّ من ميكانيكا الكم ونظرية النسبية في القرن العشرين، بينما صاغ السير إسحاق نيوتن قوانين الميكانيكا الكلاسيكية عام ١٦٨٧.[1]

تمكِّننا قوانين الميكانيكا الكلاسيكية من حساب مسارات كرات البيسبول، وطلقات الرصاص، ومَركَبات الفضاء (أثناء فترة إطلاق الصاروخ وبعدها)، والكواكب أثناء دورانها حول الشمس. وباستخدام هذه القوانين يمكننا التنبؤ بعَلاقة الموضع مقابل الزمن بالنسبة لأسطوانة تتدحرج هابطة مستوًى مائلًا، أو بالنسبة لبندول متذبذب، ونستطيع حساب قوة شد السلك عند تعليق صورة على حائط أو جدار.

إن الأهمية العملية للموضوع قليلًا ما تحتاج إلى توضيح في عالم توجد فيه سيارات، ومبانٍ، وطائرات، وجسور، وقذائف باليستية. حتى بالنسبة للشخص الذي ليس لديه أي سبب مهني للاهتمام بأيٍّ من هذه الأشياء، فإن هناك مبِّررًا عقلانيًّا ضاغطًا لدراسة الميكانيكا الكلاسيكية: إذ إنها المثال الأفضل لنظرية تفسِّر عددًا كبيرًا للغاية من الظواهر، وذلك على أساس أقل عدد من المبادئ البسيطة. وأي شخص يدرس الميكانيكا بجِدِّيَّة، حتى على المستوى التمهيدي، سيجد في هذه الدراسة مغامرة فكرية حقيقية، وينمِّي داخله

احترامًا دائمًا للدقة البارعة المطلوبة عند تطبيق المفاهيم «البسيطة» على تحليل الأنظمة «البسيطة».

وأَوَدُّ أن أُمَيِّزَ بوضوح تامٍّ بين «الدقة البارعة» و«الخداع». لا يوجد في هذا الموضوع أي تحايل أو خداع. و«الدقة البارعة» تكمُن في ضرورة استعمال المفاهيم والمصطلحات بدقة بالغة. فالغموض في تفكير امرئ ما والغياب الطفيف للدقة المفاهيمية اللذان يمكن قَبُولهما في الخطاب اليومي، سوف يؤدِّيَان حتمًا إلى الحلول غير الصحيحة لمسائل الميكانيكا.

في معظم مقررات الفيزياء التمهيدية يُخصَّص فصل دراسي واحد (بل عادةً أقل قليلًا من ذلك) للميكانيكا. وكلٌّ من المدرس والطلاب يعملون عادةً تحت ضغط الالتزام «بتغطية» قدر معين من المادة المقرَّرة. ويصعب — بل يستحيل — «تغطية» الموضوعات الرئيسية في الميكانيكا في فصل دراسي واحد دون التغاضي عن عدد من المفاهيم الأساسية التي تشكِّل أساسًا لكل ما يليها، أو المرور عليها بسرعة خاطفة.

ربما يكون نطاق اللبس الأكثر شيوعًا هو بيان عدد القُوَى المؤثِّرة على جسم معين، ويحتاج معظم الناس إلى تدريب كافٍ قبل أن يستطيعوا تحديد عدد هذه القُوى على نحو صحيح. وعلى المرء أن يتعلَّم كيف يميِّز بين القوى المؤثرة على شيء ما والقوى التي يبذلها هذا الشيء على أشياء أخرى. وعليه أن يعرف الفرق بين القوى الحقيقية (قوى الدفع والسحب بتأثير جسم مادي على آخر) والقوى الوهمية أمثال «القوة الطاردة المركزية» (ميل جسم ما متحرك في دائرة إلى أن يخرج عن مساره) التي يجب أن تُحذف من قائمة القوى.

القارئ الملول عديم الصبر يمكن أن يضيق ذرعًا بالحَيِّز المكرَّس لمناقشة مفاهيم «واضحة» مثل: «القوة»، «الشد»، «الاحتكاك». والقارئ (على عكس الطالب الأسير في محاضرة مزعجة) له مطلق الحرية — بالطبع — في أن يقلب الورقة إلى الصفحة التالية، لكني أعتقد أن الحياة طويلة بما يكفي أن نتدبَّر بعناية في المفاهيم الأساسية، وأن الوقت المستغرَق في ذلك لن يضيع سُدًى.

يصلُح هذا الكتاب — إذا ما أضيفت إليه موضوعات قليلة (مثل مناقشة مختصرة للموجات) — لأن يكون مقرَّرًا دراسيًّا مستقلًّا تامًّا بذاته، لكني أتصور أن معظم القُرَّاء سوف يستخدمونه بوصفه نصًّا مكملًا، أو دليلًا دراسيًّا، في مقرَّر يعتمد على كتاب آخر. وهو يصلُح أيضًا لأن يكون مادة لمقرَّر دراسي يدرس عبر الإنترنت.

يحتوي كل فصل على عدد من الأمثلة — وهي مسائل متصلة بمحتويات الفصل — بالإضافة إلى الحلول والمناقشة. لا يوجد في هذه الأمثلة أي مسألة «مخادعة»، لكن بعضها

يحتوي على لمحات تتحدَّى بعض القراء على الأقل. وإني لأنصح بقوة أن ينتهي الطالب أو الطالبة من حلِّهما الخاصِّ للمثال قبل قراءة الحل الموجود في النص.

يروَّج لبعض المُقرَّرات التمهيدية في الميكانيكا بالقول إنها لا تتطلب أي معرفة بحساب التفاضُل والتكامُل، لكن حساب التفاضل والتكامل عادة ما يطلُّ برأسه حتى إذا لم يعلن عن نفسه صراحة (على سبيل المثال، عند استنتاج عجلة جسيم متحرك في دائرة، أو عند تعريف الشغل واستنتاج العَلاقة بين الشغل وطاقة الحركة).

وبما أن الميكانيكا توفر أمثلة جيِّدة للمعنى الفيزيائي «للتفاضل» و«التكامل»، فإننا أدخلنا وشرحنا هذين المفهومين الرياضيين في السياق المناسب. ودونما تكبُّد أي عِبءٍ إضافي، فإن القارئ غير الملم بمفهوم المتَّجه وجبر المتجهات سوف يجِد مناقشةً لتلك الموضوعات في الملحق (أ).

الفصل الأول

الكينماتيكا: الوصف الرياضياتي للحركة

الكينماتيكا هي ببساطة الوصف الرياضياتي للحركة، دون الرجوع إلى القوى التي تسبِّب الحركة. ومن ثمَّ، فإن الكينماتيكا ليست في الواقع جزءًا من علم الفيزياء، لكنها تمنحنا الإطار الرياضياتي الذي يمكن من خلاله صياغة قوانين الفيزياء بطريقة دقيقة.

(١) الحركة في بُعد واحد

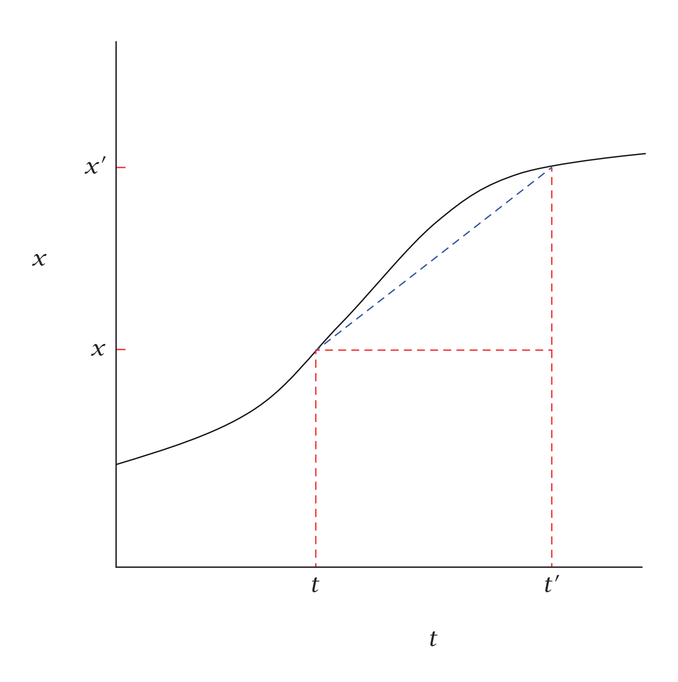
دعنا نتأمل جسمًا ماديًّا (جسيمًا) محدَّد الحركة على طول خط مستقيم معيَّن (مثلًا: سيارة متحركة على طريق سريع مستقيم). إذا اتخذنا نقطةً ما على الخط لتكون نقطة الأصل، فيمكن تعيين موضع الجسيم عند أي لحظة بعدد x يعطي المسافة من نقطة الأصل إلى الجسيم. تُعيَّن قيم x موجبة للنقاط الموجودة على أحد جانبي نقطة الأصل، وتُعيَّن قيم x سالبة للنقاط الموجودة على الجانب الآخر لنقطة الأصل، وبهذا تكون كل قيمة من x مناظرة لنقطة وحيدة. أما أي الاتجاهين هو الموجب وأيهما يكون السالب، فهذا أمر اتفاقي. تعتمد قيمة x العددية بصورة واضحة على وحدة الطول التي نستخدمها (مثلًا: القدم، أو المتر، أو الميل). إذا لم يكن الجسيم ساكنًا فإن x سوف تتغير مع الزمن. يُرمز لقيمة x عند زمن t بالرمز $x(t)$.

تُعَرَّف السرعة المتوسطة لجسيم خلال الفترة الزمنية من t إلى t' بالعلاقة:

$$v_{\text{avg}} = \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}, \tag{1-1}$$

أي إنها التغير في الموضع مقسومًا على التغيُّر في الزمن. إذا رسمنا رسمًا بيانيًّا لـ x مقابل t (مثلًا، شكل ١-١) سوف نرى أن $[x(t') - x(t)]/[t' - t]$ ما هو إلا ميل الخط

المستقيم المتقطع الذي يصل بين النقطتين اللتين تمثلان موضعي الجسيم عند الزمنين t' وt.

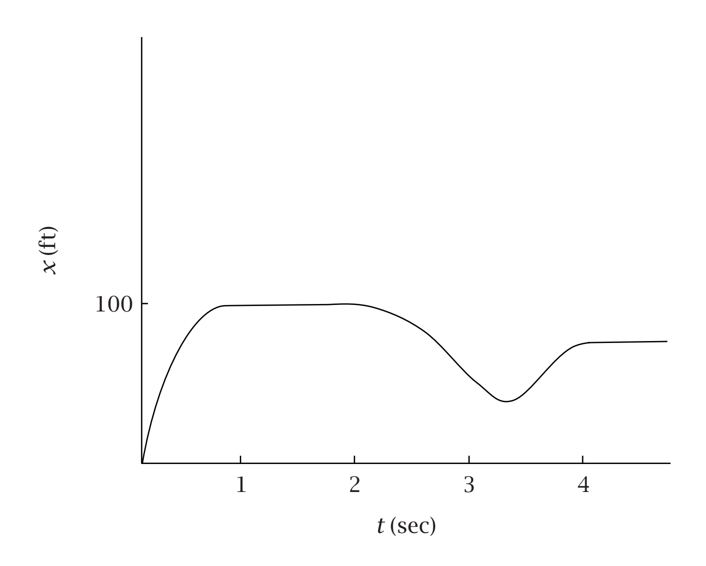


شكل ١-١: مثال للموضع مقابل الزمن.

إن المفهوم الأهم والأكثر دقة هو مفهوم السرعة اللحظية (التي يظهرها عداد السرعة في سيارتك). إذا أبقينا على t ثابتة وتركنا t' تقترب أكثر فأكثر من t، فإن حاصل المقدار $[x(t')-x(t)]/[t'-t]$ سوف يقترب من قيمة نهائية محددة (شريطة أن يكون الرسم البياني لـ x مقابل t سلسًا بدرجة كافية) هي ميل المماس لمنحنى x مقابل t عند النقطة $(t,x(t))$. يطلق على هذه القيمة النهائية، التي يمكن اعتبارها متوسط السرعة خلال فترة زمنية متناهية الصغر تتضمن الزمن t: «السرعة اللحظية عند زمن t»، أو باختصار أكثر «السرعة عند زمن t». وتُكتب على الصورة:

$$v(t) = \lim_{t' \to t} \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}. \qquad (1\text{–}2)$$

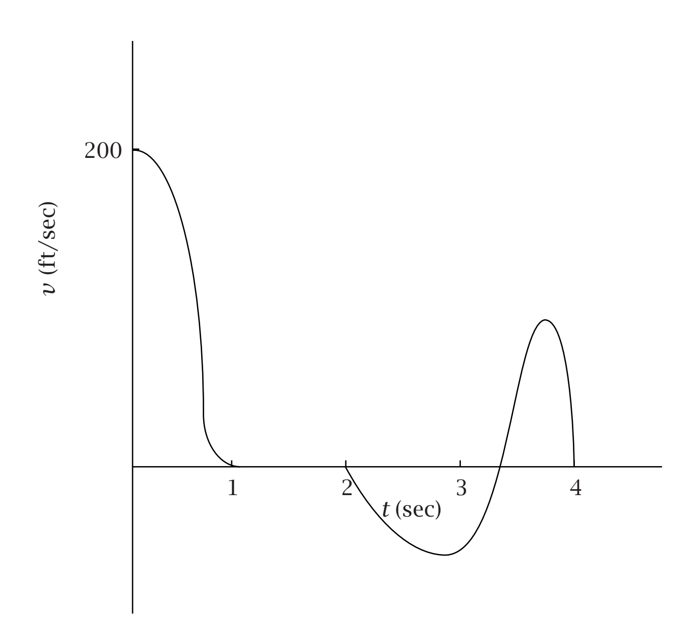
هذه المعادلة مألوفة لأي شخص درس علم حساب التفاضل، يسمى الجانب الأيمن «بمشتقة x بالنسبة إلى t» التي كثيرًا ما يُرمز لها بالرمز dx/dt. ومن ثَمَّ يكون $v(t) = dx/dt$.



شكل ١-٢: مثال آخر على الموضع مقابل الزمن.

إذا كانت $x(t)$ معطاة في هيئة معادلة صريحة، فيمكننا حساب $v(t)$ إما مباشرة من المعادلة (2–1) أو باستخدام قواعد حساب المشتقات التي تُدَرَّس في مناهج حساب التفاضل والتكامل (هذه القواعد، منها مثلًا: $d/dt(t^n) = nt^{n-1}$، تلخص فقط نتائج تعيين الجانب الأيمن من (2–1) لدوال من $x(t)$ متعددة الصور). أحد التمارين المفيدة هو رسم منحنى بياني كيفي سليم $v(t)$ عندما تكون $x(t)$ معطاة في هيئة منحنًى بياني بدلًا من أن تكون معطاة في هيئة علاقة رياضياتية. افترض، على سبيل المثال، أن الرسم البياني $x(t)$ هو شكل ١-٢. نرسم منحنًى بيانيًّا $v(t)$ عن طريق تقدير الميل للمنحنى البياني x مقابل t عند كل نقطة. سنجد أن الميل يكون موجبًا عند $t = 0$ (وتكون له قيمة عددية تقدر بحوالي ٢٠٠ قدم/ثانية، مع أننا لسنا مهتمِّين هنا بالأرقام الدقيقة

جدًّا) ويستمر موجبًا ولكن بقيم متناقصة حتى $t = 1$. ويكون الميل صفرًا بين $t = 1$ و$t = 2$، ثُمَّ يصبح بعدها سالبًا، وهكذا. (إذا كانت قيمة v الموجبة تعني أن الجسم يتحرك إلى الأمام، فإن قيمة v السالبة تعني أن الجسم يتحرك إلى الخلف.) الشكل ١-٣ يعرض منحنًى بيانيًّا تقريبيًّا لـ $v(t)$.

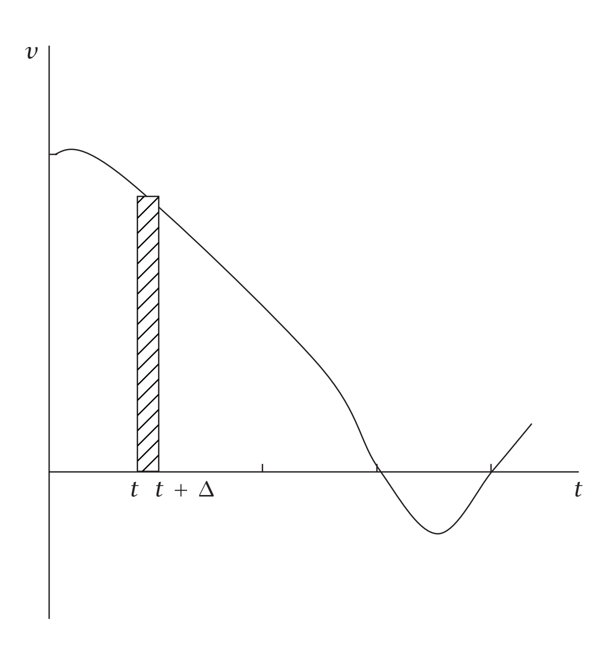


شكل ١-٣: المنحنى البياني المناظر للسرعة مقابل الزمن.

إذا كان لدينا $v(t)$، إما في هيئة علاقة رياضياتية أو منحنًى بياني، فإنه يمكننا حساب $x(t)$. العملية الرياضياتية لإيجاد الدالة $x(t)$ عندما يكون مقدار ميلها $v(t)$ معلومًا عند جميع النقاط تسمى «التكامل». فمثلًا، إذا كان $v(t) = 9t^3$، فإن $x(t) = (9/4)t^4 + c$، حيث c ثابت ما (البرهان ببساطة هو حساب dx/dt والتأكُّد من أننا نحصل على $v(t)$ المرغوبة). ظهور الثابت الاعتباطي c في $x(t)$ ليس مفاجئًا؛ لأن العلم بالسرعة عند جميع الأزمنة ليس كافيًا تمامًا لتعيين الموضع عند جميع الأزمنة على نحو

كامل. فينبغي لنا أيضًا أن نعلم من أين بدأ الجسم؛ أي، قيمة x عند $t = 0$. فإذا كان $x(t) = (9/4)t^4 + c$، فإن $x(0) = c$.

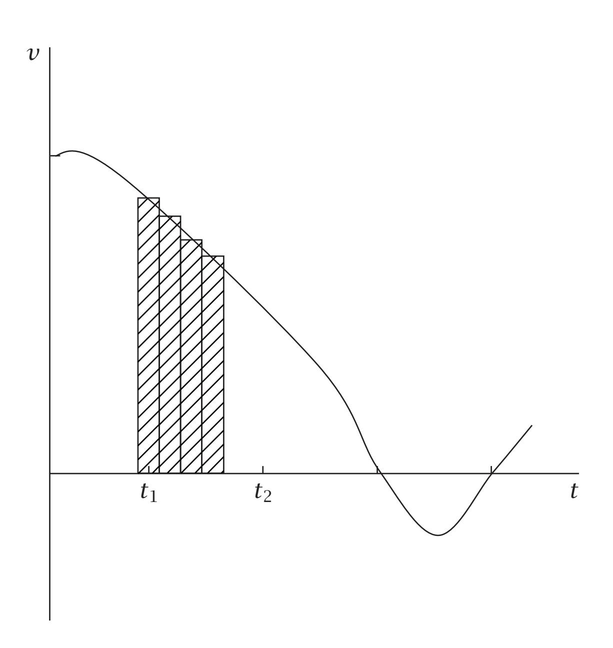
لنفترض أن لدينا مثلًا المنحنى البياني $v(t)$، شكل ١-٤. ولنتدبر المستطيل المظلل الذي ارتفاعه $v(t)$ وعرضه Δ، حيث Δ فترة زمنية قصيرة جدًّا.



شكل ١-٤: المساحة المظللة تمثل الإزاحة خلال $t \to t + \Delta$.

مساحة هذا المستطيل هي $v(t)\Delta$، وتساوي الإزاحة (أي التغير في x) للجسيم خلال الفترة الزمنية من t إلى $t + \Delta$. (بالمعنى الدقيق، لا تكون العبارة السابقة صحيحة تمامًا إلا إذا كانت $v(t)$ ثابتة خلال الفترة الزمنية من t إلى $t + \Delta$، ولكن إذا كان التغير Δ صغيرًا بدرجة كافية فيمكن إهمال تغير v خلال هذه الفترة.) إذا كان t_1 وt_2 هما أي زمنين، وقمنا بتقسيم الفترة بينهما إلى فترات كثيرة صغيرة، فإن الإزاحة خلال أيٍّ من تلك الفترات الجزئية تساوي تقريبًا مساحة المستطيل المناظر في شكل ١-٥. ومن ثم، فإن محصلة الإزاحة $x(t_2) - x(t_1)$ تساوي تقريبًا مجموع مساحات المستطيلات. وكلما

كانت الفترات الجزئية أصغر فأصغر، يصير من الممكن إهمال الخطأ في هذا التقريب؛ وبذلك نجد أن المساحة تحت الجزء من منحنى v مقابل t الواقع بين زمن t_1 وt_2 تساوي الإزاحة $x(t_2) - x(t_1)$ التي يجتازها الجسيم خلال تلك الفترة الزمنية.

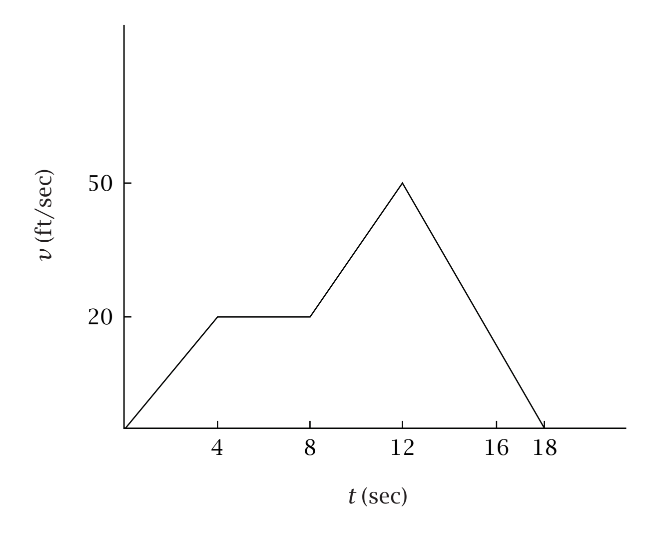


شكل ١-٥: المساحة المظللة تمثل الإزاحة خلال $t_1 \to t_2$.

إن العبارة السابقة صحيحة حتى لو أصبحت v سالبة، بشرط أن نُعرِّف المساحة بأنها سالبة في المناطق التي تكون فيها v سالبة. بلغة حساب التكامل نكتب:

$$x\,(t_2) - x\,(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v\,(t)\,dt. \tag{1-3}$$

يسمى الجانب الأيمن من المعادلة (1-3) «تكاملَ $v(t)$ بالنسبة إلى t من t_1 إلى t_2»، ويعرَّف رياضيًّا بأنه نهاية مجموع مساحات المستطيلات في شكل ١-٥ عندما تئول مقادير عرض المستطيلات المفردة إلى صفر.



شكل ١-٦: رسم بياني للسرعة مقابل الزمن بالنسبة لسيارة.

مثال ١-١ (حساب المسافة والسرعة المتوسطة). يبين شكل ١-٦ سرعة سيارة ما كدالَّة في الزمن. احسب بُعد السيارة عن نقطة بدايتها عند $t = 6, 12, 16, 18\,\text{sec}$. احسب السرعة المتوسطة خلال الفترة من $t = 4\,\text{sec}$ إلى $t = 15\,\text{sec}$، وخلال الفترة من $t = 0$ إلى $t = 18\,\text{sec}$.

الحل. حساب المساحات $x(6) = 40 + 40 = 80'$؛ $x(12) = 40 + 80 + 140 = 260'$؛ $x(16) = 260 + 4(50 + 16.67)/2 = 393.3'$؛ $x(18) = 260 + 150 = 410'$. $x(15) - x(4) = 332.5'$؛ السرعة المتوسطة من $t = 4$ إلى $t = 15$ تساوي $30.23\,\text{ft/sec}$؛ السرعة المتوسطة من $t = 0$ إلى $t = 18$ تساوي $22.78\,\text{ft/sec}$. [ملحوظة: بعد أن يتعلم الطلاب المزيد من العلاقات، سوف يستخدم الكثير منهم علاقات رياضياتية بدلًا من الحساب البسيط للمساحات ويحصلون على نتيجة خاطئة.]

مثال ١-٢. سيدة تقود سيارتها بين كشكين لتحصيل الرسوم يبعدان ٦٠ ميلًا عن بعضهما. تقود الثلاثين ميلًا الأولى بسرعة مقدارها ٤٠ ميلًا في الساعة. ما مقدار السرعة

(الثابتة) التي ينبغي أن تقود بها الأميال المتبقية لكي يكون مقدار سرعتها المتوسطة بين كشكي دفع الرسوم ٥٠ ميلًا في الساعة؟

الحل. إذا كان T هو الزمن الكلي مقاسًا بالساعة و$60/T = 50$، يكون $T = 1.2$. زمن الثلاثين ميلًا الأولى هو: $30/40 = .75$. وبذلك، يكون زمن الثلاثين ميلًا المتبقية هو: $1.2 - .75 = .45$. وينبغي أن يكون مقدار السرعة أثناء قطع الثلاثين ميلًا الثانية هو: $30/.45 = 66.67\,\text{mph}$.

(٢) التسارع (العجلة)

تُعَرَّف العجلة بأنها معدل تغير السرعة. وتُعَرَّف العجلة المتوسطة خلال الفترة من t إلى t' بالمعادلة:

$$a_{\text{avg}} = \frac{v\,(t') - v\,(t)}{t' - t}, \tag{1-4}$$

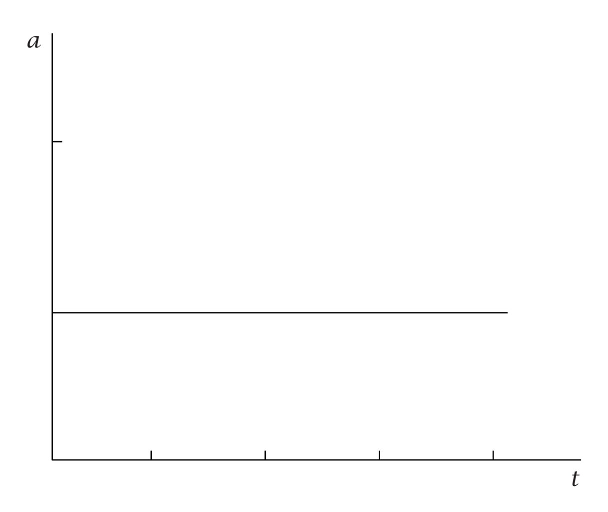
حيث $v(t')$ و$v(t)$ هما القيمتان اللحظيتان للسرعة عند الزمنين t' وt. تُعَرَّف العجلة اللحظية بأنها العجلة المتوسطة خلال فترة زمنية متناهية الصغر؛ أي:

$$a\,(t) = \lim_{t' \to t} \frac{v\,(t') - v\,(t)}{t' - t}. \tag{1-5}$$

بما أن $v(t) = dx/dt$، فيمكننا كتابة (بلغة حساب التفاضل والتكامل) $a(t) = d^2x/dt^2$. نؤكِّد على أن هذا هو ببساطة اختصار للمعادلة $a(t) = d/dt[dx/dt]$.

بمقارنة المعادلتين (1–5) و(1–2) نجِد أن العلاقة بين $a(t)$ و$v(t)$ مماثلة للعلاقة بين $v(t)$ و$x(t)$. يُستنتج من ذلك أنه إذا كانت $v(t)$ معطاة برسم بياني؛ فإن ميل المُنحنى البياني هو $a(t)$. إذا كان $a(t)$ معطى برسم بياني فينبغي أن نتوقع أيضًا أن المساحة تحت جزء المنحنى الواقع بين زمن t_1 وزمن t_2 تساوي التغيُّر في السرعة $v(t_2) - v(t_1)$. المعادلة المشابهة للمعادلة (1–3) هي:

$$v\,(t_2) - v\,(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a\,(t)\,dt. \tag{1-6}$$



شكل ١-٧: رسم بياني لعجلة ثابتة.

مثال ١-٣ (العجلة اللحظية). ارسم منحنًى بيانيًّا للعجلة المتوسطة $a(t)$ إذا كانت $v(t)$ معطاة بشكل ١-٦.

(٣) الحركة بعجلة ثابتة

جميع المناقشات السابقة مناقشات عامة بالكامل وتُطَبَّقُ على أي حركة أحادية البعد. والحركة التي تكون العجلة فيها ثابتة مع الزمن تُعَد حالة خاصة مهمة. سوف نجِد بعد قليل أن هذه الحالة تحدث كلما كانت القوى هي نفسها دائمًا عند أي زمن. إن المنحنى البياني للعجلة مقابل الزمن بسيط (شكل ١-٧). المساحة تحت جزء هذا المنحنى البياني الواقع بين الزمن صفر وزمن t تساوي $a \cdot t$. وبذلك يكون $v(t) - v(0) = at$. لكي نصل إلى التعبير المستخدم بصورة شائعة نكتب v بدلًا من $v(t)$ وv_0 بدلًا من $v(0)$. بذلك يكون:

$$v = v_0 + at. \tag{1-7}$$

الرسم البياني v مقابل t (شكل ١-٨) عبارة عن خط مستقيم ميله a. يمكننا الحصول على علاقة صريحة لـ $x(t)$ عن طريق إدخال هذه العلاقة في المعادلة (1-3) وإجراء التكامل أو — بدون حساب التكامل — عن طريق حساب المساحة المظللة تحت الخط في شكل ١-٨ بين $t = 0$ وt. هندسيًّا (شكل ١-٩)، تكون المساحة تحت شكل ١-٨ بين $t = 0$ وt هي العرض t مضروبًا في الارتفاع عند نقطة المنتصف وهو $1/2(v_0 + v_0 + at)$. وبذلك نجد أن $x(t) - x_0 = 1/2(2v_0t + at^2)$. وأخيرًا يكون:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v + v_0)\,t. \tag{1-8}$$

إذا أردنا استخدام حساب التفاضل والتكامل (أي: معادلة (1-3))، نكتب:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t (v_0 + at')\,dt' = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1-9}$$

(لاحظ أننا أعدنا تسمية متغير التكامل «الوهمي» t' لتجنب الخلط بينه وبين النهاية العظمى t للتكامل.)

بمقارنة المعادلة (1-8) مع تعريف السرعة المتوسطة (معادلة (1-1)) نجد أن السرعة المتوسطة خلال أي فترة زمنية تساوي نصف مجموع السرعتين الابتدائية والنهائية. وفيما عدا حالات خاصة، يكون هذا صحيحًا فقط للحركة ذات العجلة المنتظمة.

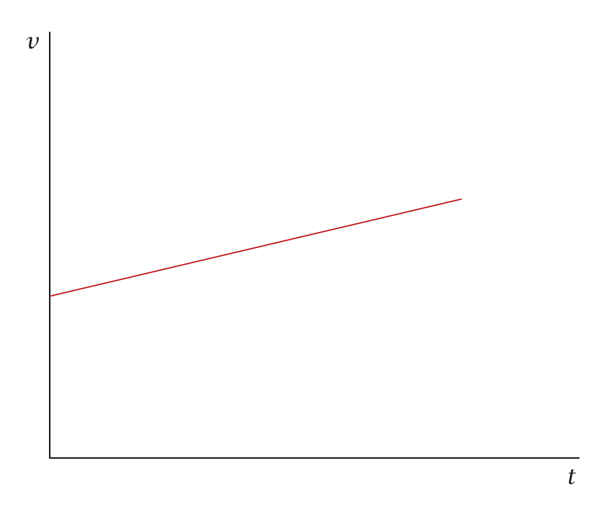
نرغب أحيانًا في معرفة السرعة كدالة للموضع x بدلًا من أن تكون دالة للزمن t. بحل المعادلة (1-7) لـ t، أي: $t = (v - v_0)/a$ والتعويض في المعادلة (1-8) نحصل على:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0). \tag{1-10}$$

نقوم هنا بتجميع العلاقات الرياضياتية التي سبق اشتقاقها، والقابلة جميعها للتطبيق فقط في حالة الحركة بعجلة ثابتة.

$$v = v_0 + at, \tag{1-11a}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v + v_0)\,t, \tag{1-11b}$$



شكل ١-٨: رسم السرعة مقابل الزمن لعجلة ثابتة.

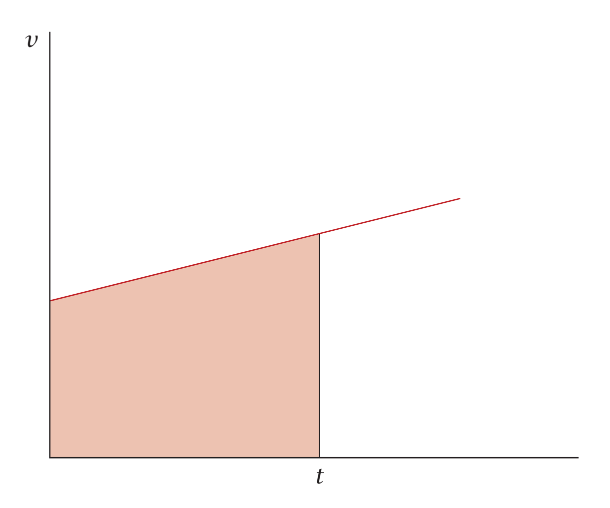
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \tag{1–11c}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right). \tag{1–11d}$$

هناك غالبًا أكثر من طريقة لحل مسألةٍ ما، ولكن كل الطرق ليست بنفس الكفاءة. فعلى حسب المعلومات المعطاة والسؤال المطروح، تؤدي عادة إحدى العلاقات السابقة أعلاه إلى الجواب مباشرة.

مثال ١-٤ (مسألة عجلة ثابتة). تتباطأ سيارة (بعجلة تناقصية ثابتة) من 60 mph إلى السكون خلال مسافة 500 ft. [لاحظ أن: 60 mph = 88 ft/sec]

(١) احسب العجلة.
(٢) كم استغرقت من الوقت؟
(٣) ما المسافة التي قطعتها السيارة منذ لحظة بداية عمل المكابح إلى اللحظة التي كان عندها مقدار السرعة 30 mph؟



شكل ١-٩: المساحة تحت المنحنى v مقابل t.

(٤) إذا كانت السيارة تسير بسرعة مقدارها 90 mph عند بدء عمل المكابح، بينما كان التباطؤ كما هو سابقًا، كيف سيتغير كل من مسافة التوقف وزمن التوقف؟

الحل. سوف نستخدم الرموز $v_0 = 88\,\text{ft/s}$، $D = 500\,\text{ft}$.

(١) $0 = v_0^2 + 2aD \Rightarrow a = -7.74\,\text{ft/s}^2$.

(٢) T = زمن التوقف، $D = 1/2 v_0 T \Rightarrow T = 11.36\,\text{s}$ (يمكن أيضًا استخدام المعادلة (1-11a)).

(٣) D' = إجابة (٣)، أي إن:

$$\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2 = v_0^2 + 2aD' \quad \left(\text{where } a = -\frac{v_0^2}{2D}\right), \qquad (1\text{–}12)$$

$$\text{thus } \frac{D'}{D} = \frac{3}{4} \Longrightarrow D' = 375\,\text{ft}.$$

(٤) D'' = إجابة (٤). من العلاقة (1-11d)= $D''/D = (90/60)^2 \Rightarrow D'' = 1125\,\text{ft}$. من العلاقة (1-11a) يكون زمن التوقف هو $(3/2)11.36 = 17.04\,\text{sec}$.

مثال ١–٥ (مثال آخر للعجلة الثابتة). تتسارع سيارة سباق بعجلة ثابتة على شريط اندفاع مستقيم. تمر السيارة برادار (رقم ١) يقيس سرعتها اللحظية بمقدار 60 ft/s بعدها تمر برادار ثانٍ (رقم ٢) يقيس سرعتها اللحظية بمقدار 150 ft/s.

(١) ما مقدار سرعتها عند منتصف الفترة (الزمنية) بين القياسين؟
(٢) ما مقدار سرعتها عندما تكون في منتصف المسافة بين الرادارين؟
(٣) إذا كانت المسافة بين الرادارين هي 500 ft، كم تبعد نقطة البداية عن الرادار (رقم ١)؟

الحل. الرموز: $v_1 = 60$، $v_2 = 150$، $T =$ الفترة الزمنية، $D =$ الفاصل المكاني.

(١) $a = (v_2 - v_1)/T$. عند زمن $T/2$ يكون $v = v_1 + aT/2 = (v_1 + v_2)/2 =$ 105 ft/s.

(٢) $v_3 =$ مقدار السرعة عند $D/2$، $a = (v_2^2 - v_1^2)/2D$. $v_3^2 = v_1^2 + 2aD/2 = (v_1^2 + v_2^2)/2$، $v_3 = 114.24$ ft/s.

(٣) $D' =$ المسافة من نقطة البداية إلى الرادار (رقم ١). $v_1^2 = 2aD' \Rightarrow D' = v_1^2 D/(v_2^2 - v_1^2) = 95.2$ ft.

(٤) الحركة في بُعدين وفي ثلاثة أبعاد

حركة أي جسيم لا تقتصر بالضرورة على الحركة في خط مستقيم (اعتبر، على سبيل المثال، كرة طائرة أو قمرًا صناعيًّا في مدارٍ حول الأرض)، وعمومًا يتطلب تعيين موضع الجسيم عند زمن t ثلاثة محاور كارتيزية، يرمز لها عادة $x(t)$، $y(t)$، $z(t)$. تقريبًا في جميع الحالات التي سوف نناقشها، تكون الحركة محدودة في مستوى، وإذا أخذنا اثنين من محاورنا (مثلًا، المحورين x وy) في المستوى. عندئذٍ سيتطلب تحديد الموضع محورين اثنين فقط.

يعمم مباشرة مفهوم السرعة والعجلة على ثلاثة أبعاد. إذا كانت إحداثيات الجسيم عند زمن t هي $(x(t), y(t), z(t))$ وعند t' هي $(x(t'), y(t'), z(t'))$، حينئذ نُعرِّف سرعة x المتوسطة خلال الفترة الزمنية $t \rightarrow t'$ بالمعادلة $v_{x,\text{av}} = [x(t') - x(t)]/[t' -$

t]. وتُعرَّف $v_{y,\text{av}}$ و$v_{z,\text{av}}$ بمعادلتين مماثلتين. كما تُعَرَّف سرعة x وسرعة y وسرعة z اللحظية تمامًا كما في حالة الحركة أحادية الأبعاد؛ أي إن:

$$v_x(t) \equiv \lim_{t' \to t} \frac{x(t') - x(t)}{t - t'} = \frac{dx}{dt}, \tag{1-13}$$

وهكذا. بالمثل، نُعَرِّف $a_{x,\text{avg}} = [v_x(t') - v_x(t)]/[t' - t]$ بتعريفات مماثلة لكل من $a_{y,\text{avg}}$ و$a_{z,\text{avg}}$. وتكون عجلة x اللحظية هي:

$$a_x(t) \equiv \lim_{t' \to t} \frac{v_x(t') - v_x(t)}{t' - t} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{1-14}$$

مع تعريفين مماثلين لكل من $a_y(t)$ و$a_z(t)$.

يبدو أن كل ما سبق تعوزه البراعة إلى حَدٍّ ما. ومن البدهي تقريبًا أننا نستطيع استبدال ثلاث معادلات بمعادلة واحدة عن طريق إدخال رمز أكثر أناقة. بل إن هذا الرمز الأكثر أناقة، والذي يُسَمَّى الرمز المُتَّجِهي، له ميزة أكثر أهمية: فهو يمكننا من صياغة قوانين الفيزياء بشكل مستقل صراحة عن اتجاه المَحاوِر المحددة التي قمنا باختيارها اعتباطيًّا. إن القارئ الذي ليست له دراية بالترميز المتجهي أو جمع وطرح المتجهات أو كليهما، عليه قراءة الجزء المتعلق بذلك في ملحق (أ). الأقسام التي تُعَرِّف وتشرح الضرب القياسي والضرب الاتجاهي لمُتجهين ليست ذات صلة في هذه المرحلة ومن ثم يمكن حذفها.

نقدم الرمز $\vec{r}$ كاختصار للعدد الثلاثي (x, y, z) المكوَّن من الإحداثيات الثلاث لجسيم. نسمي $\vec{r}$ متجه الموضع للجسيم ونسمي x وy وx مركبات متجه الموضع بالنسبة إلى مجموعة المحاور المختارة. يُعَبَّر عادة عن المتجه في النص المطبوع بواسطة حرف سميك (ثقيل) وفي النص المخطوط باليد أو المكتوب بالآلة الكاتبة يُعَبَّر عنه عادة بحرف فوقه سهم أفقي. (بما أن النسخة الأولية من هذا النص كانت مكتوبة على شكل حروف مطبعية؛ فقد رأينا أنه من الأنسب أن يكون الترميز باستخدام السهم.)

يُعَرَّف متجهَا السرعة والعجلة على الصورتين:

$$\vec{v}(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{r}(t') - \vec{r}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{1-15}$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{t' \to t} \frac{\vec{v}(t') - \vec{v}(t)}{t' - t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1-16}$$

[نؤكد، مرة أخرى، على أهمية فَهم ما يعنيه الفارق بين متجهين كما هو مشروح في ملحق (أ).] تحديدًا، يكون الجسيم متحركًا بعجلة تزايدية إذا كان اتجاه متجه السرعة متغيرًا، حتى لو ظل مقدار متجه السرعة (مقدار السرعة) ثابتًا.

إحدى المسائل الكينماتيكية المهمة للغاية، والتي حلها لأول مرة نيوتن (عام ١٦٨٦) هي حساب السرعة اللحظية $\vec{a}(t)$ لجسيم متحرك في دائرة بسرعة مقدارها ثابت. نسميها الحركة الدائرية المنتظمة. سوف نحل المسألة بطريقتين؛ الأولى: طريقة نيوتن.

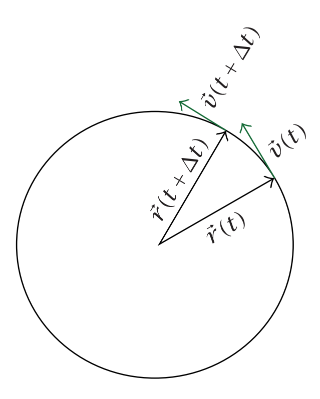
(١-٤) الحركة الدائرية: الطريقة الهندسية

تُنشئ الطريقة الهندسية المتجه $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t') - \vec{v}(t)$ بشكل صريح وتحسب النهاية المطلوبة بواسطة المعادلة (1-16). نجعل $t' = t + \Delta t$ ونبين في شكل ١-١٠ موضع ومتجه سرعة الجسيم عند زمن t وزمن $t + \Delta t$. الصورة مرسومة لجسيم يتحرك باتجاه عكس عقارب الساعة، ولكننا سوف نرى أن العجلة نفسها تحدث عند الحركة باتجاه عقارب الساعة. لاحظ أن المتجهين $\vec{r}(t)$ و$\vec{r}(t + \Delta t)$ لهما نفس الطول r، وأن المتجهين $\vec{v}(t)$ و$\vec{v}(t + \Delta t)$ لهما نفس الطول v لافتراض أن مقدار السرعة ثابت. الأكثر من ذلك، الزاوية بين المتجهين $\vec{r}$ هي ذاتها الزاوية بين المتجهين $\vec{v}$ لأن $\vec{v}$ عمودي على $\vec{r}$ عند كل لحظة. يكون طول القوس المقطوع بواسطة الجسيم خلال زمن Δt هو $v\Delta t$، والقياس الدائري للزاوية بين $\vec{r}(t)$ و$\vec{r}(t + \Delta t)$ هو $(v\Delta t)/r$.

نحن مهتمون بالنهاية $\Delta\vec{v}/\Delta t$ عندما تئول $\Delta t \to 0$. إذا قمنا بجلب ذيلي $\vec{v}(t)$ و$v(t+\Delta t)$ معًا عن طريق إزاحة متوازية لأي من المتجهين، يكون عندئذٍ $\Delta\vec{v}$ هو المتجه من قمة $\vec{v}(t)$ إلى قمة $\vec{v}(t + \Delta t)$ (انظر شكل ١-١١). المثلث في شكل ١-١١ متساوي الساقين، وعندما تئول $\Delta t \to 0$ تصبح زاويتا قاعدة المثلث متساوي الساقين قائمتين. لذلك نرى أن $\Delta\vec{v}$ تصبح عمودية على متجه السرعة اللحظية $\vec{v}$ وتوازي $\vec{r}$ في الاتجاه العكسي (يكون هذا صحيحًا أيضًا للحركة في اتجاه عقارب الساعة وهو ما يمكن تبينه من رسم الصورة).

مقدار متجه العجلة هو:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}. \tag{1-17}$$



شكل ١-١٠: هندسة إنشاء العجلة لحركة دائرية ذات مقدار سرعة ثابت.

وبما أن المثلثين متساويي الساقين في شكلي ١-١١ و١-١٢ متشابهان، فإن $|\Delta\vec{v}|/v = |\Delta\vec{r}|/r$. وحيث إن الزاوية بين $\vec{r}(t)$ و$\vec{r}(t+\Delta t)$ صغيرة جدًّا، فيمكن الاستعاضة عن طول الوتر $|\Delta\vec{r}|$ بطول القوس $v\Delta t$. وبهذا $|\Delta\vec{v}| = v^2\Delta t/r$.

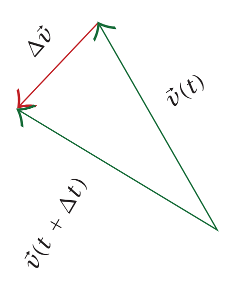
لقد بيَّنا إذن أن متجه العجلة له المقدار v^2/r واتجاهه يكون من الموضع اللحظي للجسيم ناحية مركز الدائرة، أي:

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\right)\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\frac{v^2}{r}\hat{r}, \tag{1-18}$$

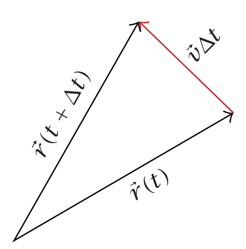
حيث $\hat{r}$ هو متجه وحدة يشير من مركز الدائرة ناحية الجسيم. تسمَّى هذه العجلة التي قمنا بحسابها عادة بالعجلة المركزية. كلمة «مركزية» تعني أنها «متجهة ناحية المركز» وهي لمجرد التذكير باتجاه $\vec{a}$. إذا لم يكُن مقدار السرعة v ثابتًا، يكون للعجلة مركبة مماسية أيضًا مقدارها dv/dt.

(٤-٢) الحركة الدائرية: الطريقة التحليلية

إذا أدخلنا متجهي الوحدة $\hat{i}$ و$\hat{j}$ (شكل ١-١٣) تكون الصورة المتجهية من مركز الدائرة حتى الموضع اللحظي للجسيم هي $\vec{r} = r[\cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}]$، حيث r وθ هما



شكل ١-١١: إنشاء هندسي لتغير السرعة لحركة دائرية ذات مقدار سرعة ثابت.



شكل ١-١٢: إنشاء هندسي لتغير الموضع لحركة دائرية ذات مقدار سرعة ثابت.

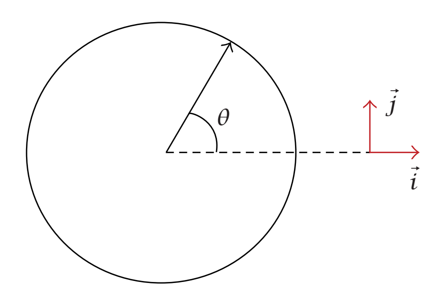
الإحداثيان القطبيان المعتادان. إذا كان الجسيم يتحرك في دائرة بمقدار سرعة ثابت، يكون $dr/dt = 0$ و$d\theta/dt = \text{constant}$ (ثابت). إذن:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\left[-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{i} + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\hat{j}\right]. \qquad (1\text{–}19)$$

لقد استخدمنا قاعدة السلسلة $[d/d\theta(\cos\theta)][d\theta/dt] = d/dt(\cos\theta)$ وهكذا. لاحظ أن معادلات التفاضل القياسية تتطلب أن تكون θ مُعَبَّرًا عنها بالتقدير الدائري. ينبغي أيضًا أن يكون واضحًا أن $\vec{v}$ متجه مماسي للدائرة. لاحظ أن $v^2 = (rd\theta/dt)^2\ (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = (rd\theta/dt)^2$. وبهذا يكون:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left[-\cos\theta\,\hat{i} - \sin\theta\,\hat{j}\right] = -\frac{v^2}{r}\hat{r} \qquad (1\text{–}20)$$

وهو مثل ما تم استنتاجه أعلاه بالطريقة الهندسية.



شكل ١-١٣: إنشاء هندسي لعجلة حركة دائرية ذات مقدار سرعة ثابت.

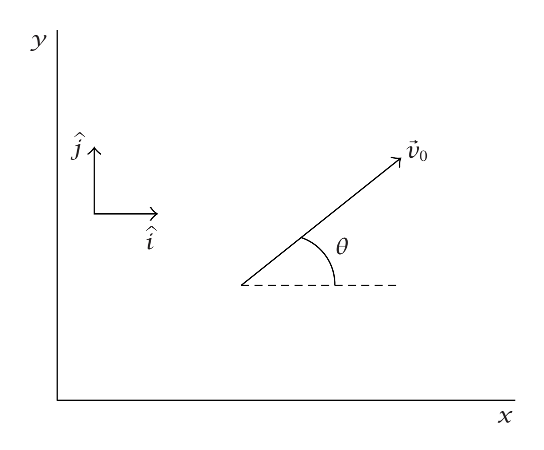
(٥) حركة جسم يسقط سقوطًا حرًّا

من الحقائق التجريبية أنه بالقرب من أي نقطة على سطح الكرة الأرضية، وفي عدم وجود مقاومة للهواء، تسقط جميع الأجسام بنفس العجلة الثابتة. يُسمَّى مقدار هذه العجلة g ويساوي $32\,\mathrm{ft/sec^2}$ تقريبًا أو $9.8\ \mathrm{meters/sec^2}$، ويكون اتجاه العجلة لأسفل؛ أي في اتجاه مركز الكرة الأرضية.

مقدار العجلة يتناسب عكسيًّا مع مربع المسافة من مركز الكرة الأرضية ويكون متجه العجلة في اتجاه مركز الأرض. طبقًا لذلك، يمكن اعتبار مقدار واتجاه العجلة ثابتين فقط في حدود المنطقة التي تكون الأبعاد الخطية فيها صغيرة جدًّا مقارنة بنصف قطر الكرة الأرضية. هذا ما تعنيه عبارة «بالقرب من».

نؤكد على أنه في غياب مقاومة الهواء لا يعتمد مقدار العجلة واتجاهها على سرعة الجسم (خصوصًا، إذا قذفت بكرة إلى أعلى تكون العجلة متجهة لأسفل أثناء ارتفاع الكرة، وأثناء سقوطها، وأيضًا عند اللحظة التي تكون فيها عند أعلى نقطة). لا يمكننا في هذه المرحلة من النقاش «استنتاج» حقيقة أن جميع الأجسام تسقط بنفس العجلة لأننا لم نذكر شيئًا عن القوى (وبالأخص القوة التثاقلية) ولا عن كيفية حركة الجسيم استجابة لقوة ما. ومع ذلك، إذا كنا سنتقبَّل الحقائق التجريبية المعطاة، يمكننا عندئذٍ استخدام أدواتنا الكينماتيكية للإجابة عن جميع الأسئلة المحتملة عن حركة الجسيم تحت تأثير الجاذبية الأرضية.

ينبغي توجيه المحور بالطريقة الأنسب رياضيًّا. وسندع المحور y الموجَب يشير رأسيًّا إلى أعلى (أي خارجًا من مركز الكرة الأرضية). عندئذٍ ينبغي أن يقع المحور x في المستوى الأفقي. نختار اتجاه المحور x بحيث تقع السرعة $\vec{v}_0$ للجسيم عند زمن $t = 0$



شكل ١-١٤: متجه السرعة الابتدائية.

في المستوى x-y. وتكون مركبات متجه العجلة هي $a_y = -g$، $a_x = a_z = 0$. تؤدي المعادلات ((1–11a)–(1–11d)) إلى:

$$v_y = v_{0,y} - gt, \quad (1\text{–}21a)$$

$$v_y^2 = v_{0,y}^2 - 2g\left(y - y_0\right), \quad (1\text{–}21b)$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}\left(v_y + v_{0,y}\right)t, \quad (1\text{–}21c)$$

$$y = y_0 + v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (1\text{–}21d)$$

$$v_x = \text{constant} = v_{0,x}, \quad (1\text{–}21e)$$

$$x = x_0 + v_{0,x}t, \quad (1\text{–}21f)$$

$$v_z = \text{constant} = 0, \quad z = \text{constant} = z_0. \quad (1\text{–}21g)$$

سوف نحدد دائمًا موضع نقطة الأصل بحيث يكون $z_0 = 0$، وبذلك تحدُث الحركة الكلية في المستوى x-y. عادة ما نضع نقطة الأصل عند الموضع الابتدائي للجسيم بحيث يكون $x_0 = y_0 = 0$، ولكن المعادلات التي في الأعلى لا تفترض هذا.

يمكننا الحصول على معادلة المسار (وهي العلاقة بين y وx) عن طريق حل المعادلة (1–21f) في t ثم التعويض بالناتج في (1–21d). نجد أن:

$$y - y_0 = \frac{v_{0,y}}{v_{0,x}}(x - x_0) - \frac{1}{2}g\frac{(x - x_0)^2}{v_{0,x}^2}. \qquad (1\text{–}22)$$

هذه، طبعًا، معادلة قطع مكافئ. إذا وضعنا نقطة الأصل عند الموضع الابتدائي للجسيم، وإذا حددنا مقدار السرعة الابتدائية v_0 والزاوية θ بين السرعة الابتدائية والمحور x (وبالتالي يكون $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ و$v_{0y} = v_0 \sin\theta$)، عندئذٍ تكون معادلة المسار هي:

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{\left(v_0^2\cos^2\theta\right)}. \qquad (1\text{–}23)$$

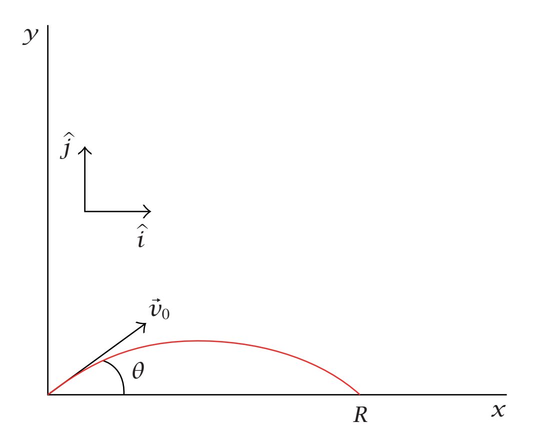
إذا تم إطلاق مدفع من نقطة على سطح الأرض، فإن المدى الأفقي R يُعَرَّف بأنه المسافة من نقطة الإطلاق إلى المكان الذي ترتطم عنده القذيفة بسطح الأرض. إذا وضعنا $y = 0$ في المعادلة (1–23) نجد أن:

$$0 = x\left[\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx}{v_0^2\cos^2\theta}\right] \qquad (1\text{–}24)$$

هذه المعادلة لها جذران، $x = 0$ و$x = (2v_0^2/g)\sin\theta\cos\theta = (v_0^2/g)\sin(2\theta)$. الجذر الأول هو، طبعًا، نقطة الإطلاق، والجذر الثاني يخبرنا بالمكان الذي هبطت عنده القذيفة؛ أي:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\theta). \qquad (1\text{–}25)$$

إذا أردنا زيادة المدى لمقدار معين من سرعة إطلاق فوهة المدفع v_0 إلى الحد الأقصى، فينبغي لنا الإطلاق بالزاوية التي تجعل من $\sin(2\theta)$ قيمة عظمى؛ أي $\theta = 45^\circ$.



شكل ١-١٥: مسار قطع مكافئ.

أبسط طريقة لإيجاد أقصى ارتفاع تصل إليه قذيفة ما هو استخدام المعادلة (1-21b)، بوضع $v_y = 0$. نجد أن $y_{max} - y_0 = (v_0^2/g)\sin^2\theta$. يمكننا أيضًا وضع $dy/dx = 0$ وإيجاد $x = R/2$، وهو الأمر البدهي عندما تأخذ في الاعتبار تماثل القطع المكافئ. عندها يمكننا تقدير y عندما يكون $x = R/2$.

مثال ١-٦ (حركة السقوط الحر بعد القذف). قُذف حجر بسرعة أفقية 40 ft/sec وسرعة رأسية (لأعلى) 20 ft/sec من على جسر ضيق يرتفع فوق سطح الماء بمقدار 200 ft.

- ما الزمن الذي ينقضي قبل أن يرتطم الحجر بالماء؟
- ما السرعة الرأسية للحجر قبل أن يرتطم بالماء مباشرة؟
- كم تبعُد المسافة الأفقية من الجسر التي يرتطم عندها الحجر بالماء؟

ملحوظة. ليس من الضروري مناقشة جزأَيِ المسار إلى أعلى وإلى أسفلَ منفصلين؛ فإن صيغ المعادلات (1-21a)–(1-21g) تسري على المسار الكلي.

الحل.

$$(h = 200') \text{ (See (1–21d))} \longrightarrow -h = v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow$$
$$t = \frac{v_{0,y} \pm \sqrt{v_{0,y}^2 + 2gh}}{g}. \quad (1–26)$$

الجذر الموجب ($4.215\,\text{sec}$) هو الجذر ذو الصلة. الجذر السالب هو الزمن الذي كان يمكن عنده قذف الحجر لأعلى من النهر بسرعة رأسية تجعله يمرُّ على الجسر عند $t = 0$ بسرعة رأسية مقدارها $20\,\text{ft/sec}$. تعطي المعادلة (1–21a) إجابة الجزء الثاني من المسألة؛ $v_y = 20 - 32(4.215) = -114.88$ (أي إن $114.88\,\text{ft/sec}$ لأسفل). يمكن أيضًا إجابة الجزء الثاني من المسألة مباشرة (دون حساب t) بواسطة المعادلة (1–21b). وأخيرًا، بالنسبة للجزء الثالث من المسألة يكون لدينا $x = 40(4.215) = 168.6\,\text{ft}$.

مثال ١–٧ (حركة السقوط الحر لكرة مضروبة). يرتطم المضرب بكرة عند نقطة تعلو عن سطح الأرض بمقدار $4\,\text{ft}$. ويكون متجه السرعة للكرة المضروبة في اتجاه $20°$ أعلى الاتجاه الأفقي.

(١) ما مقدار السرعة الابتدائية اللازمة لكي تجتاز الكرة المضروبة بالكاد جدارًا ارتفاعه $20\,\text{ft}$ يقع على بعد $350\,\text{ft}$ من قاعدة الضارب؟

(٢) يوجد حقل مستوٍ على الجانب الآخر من الجدار. إذا كانت الكرة تجتاز الجدار بالكاد، فكم تبعد المسافة الأفقية عن قاعدة الضارب التي تصطدم عندها الكرة بسطح الأرض؟

الحل. نستخدم معادلة المسار (1–23)، بأخذ نقطة الأصل عند نقطة ارتطام المضرب بالكرة. لاحظ أن $\tan 20° = 0.3640$ و$\cos^2 20° = 0.8830$. إذن يكون:

$$16 = 127.4 - 18.120\left(\frac{350}{v_0}\right)^2 \Rightarrow$$
$$v_0 = 141.2\,\text{ft/sec}. \quad (1–27)$$

باستخدام هذه القيمة لـ v_0 في معادلة المسار (1-23)، يمكننا وضع $y = -4$ (الكرة على سطح الأرض). فيكون الجِذر الموجب لـ x هو $411.0\,\text{ft}$. بتقريب بسيط ممتاز لـ x يلاحظ أن $y = 0$ عند $x = (v_0^2/g)\sin 40^\circ = 400.3\,\text{ft}$ (من معادلة المدى) ثم تقريب باقي المسار إلى خط مستقيم. هذا يضيف مسافة أفقية مقدارها $4/\tan 20^\circ = 10.99\,\text{ft}$. مما يعطي $x = 411.3\,\text{ft}$ لنقطة الهبوط، مقدارها حوالى $3.5''$ فقط.

(٦) مسائل الكينماتيكا

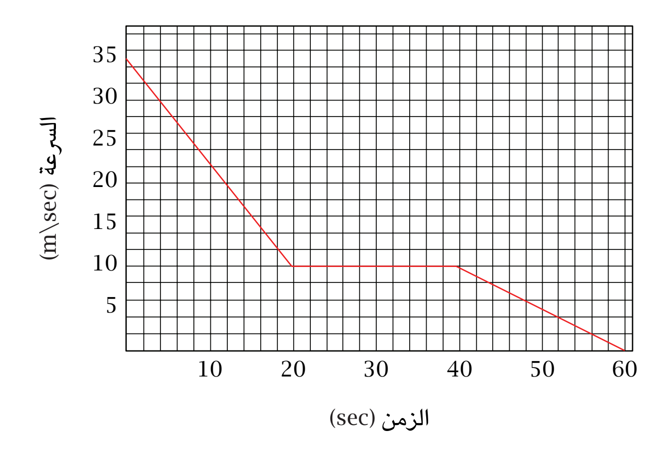
(٦-١) حركة أحادية البعد

المسألة ١-١. يبين شكل ١-١٦ علاقة السرعة مع الزمن لسيارة رياضية تسير على مسار مستوٍ. احسب ما يلي:

(أ) المسافة التي قطعتها السيارة من $t = 0$ إلى $t = 40\,\text{sec}$.
(ب) عجلة السيارة من $t = 40$ إلى $t = 60\,\text{sec}$.
(ج) السرعة المتوسطة للسيارة من $t = 0$ إلى $t = 60\,\text{sec}$.

المسألة ١-٢. أسرع الحيوانات البَرِّيَّة هو الفهد. يمكن للفهد الجري بسرعات يصِل مقاديرها إلى $101\,\text{km/h}$. ثاني أسرع حيوان برِّي هو الظبي الذي يجري بسرعة يصل مقدارها إلى $88\,\text{km/h}$.

(أ) افترض أن فهدًا بدأ في مطاردة ظبي كان متقدمًا عنه بمسافة $50\,\text{m}$. كم يستغرق الفهد من الزمن ليمسك بالظبي؟ ما المسافة التي قطعها الفهد عند هذا الزمن؟
(ب) يستطيع الفهد الحفاظ على مقدار سرعته القصوى لمدة حوالي $20\,\text{sec}$ قبل أن يحتاج إلى أن يستريح. يستطيع الظبي الاستمرار بمقدار سرعته القصوى لفترة زمنية أطول نسبيًّا. ما أقصى مسافة يتقدمها الظبي عن الفهد بحيث يظل الفهد قادرًا على الإمساك به؟



شكل ١-١٦: رسم بياني للمسألة ١-١.

المسألة ١-٣. نافذة ارتفاعها $3\,\mathrm{m}$. رُمِيَت كرة رأسيًّا من الشارع وتجاوزت، أثناء تحركها لأعلى، قمة النافذة بعد $0.400\,\mathrm{sec}$ من تجاوزها قاعدة النافذة. احسب:

(أ) أعلى ارتفاع ستصل إليه الكرة فوق قمة النافذة.
(ب) الفترة الزمنية بين اللحظتين اللتين تمر عندهما الكرة بقمة النافذة.

المسألة ١-٤. يتحرك مصعد إلى أعلى بعجلة تزايدية A. ويقذِف زنبركٌ مضغوطٌ على الأرضية بكرةٍ لأعلى بسرعة v_0 بالنسبة إلى الأرضية. احسب أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة فوق الأرضية.

المسألة ١-٥. يبلغ طول مَمَرٍّ في مطار $200\,\mathrm{m}$. ويحتوي جزء من الممر على ممشًى متحرك (سرعته $2\,\mathrm{m/s}$)، بحيث يكون للرُّكَّاب حرية الاختيار بين استخدام الممشى المتحرك أو السير بجانبه. طول الممشى أقل من $200\,\mathrm{m}$. قررت فتاتان — أليسون ومريم — أن تتسابقا من بداية الممر وحتى نهايته. يمكن لأليسون أن تجري بسرعة مقدارها $7\,\mathrm{m/s}$ ولكن غير مسموح لها استخدام الممشى المتحرك. ومريم يمكنها أن تجري بسرعة مقدارها $6\,\mathrm{m/s}$ وتستطيع استخدام الممشى (الذي ستقوم بالجري عليه، مخالِفة بذلك قواعد المطار). وكانت نتيجة السباق خلال الممر هي التعادل.

(أ) ما طول المشى؟

(ب) تسابقت الفتاتان مرة أخرى وعبرتا المر في الاتجاه العكسي من المشى المتحرك. ولكن هذه المرة لا تطأ قدم مريم المشى بينما يجب على أليسون استخدام المشى. فمَن منهما ستفوز؟

(٦-٢) حركة ثنائية وثلاثية الأبعاد

المسألة ١-٦. يعطى موضع جسيم ما كدالة في الزمن بالعلاقة:

$$\vec{r} = \left[\left(2t^2 - 7t\right)\hat{i} - t^2\hat{j}\right]\text{m}. \quad (1\text{–}28)$$

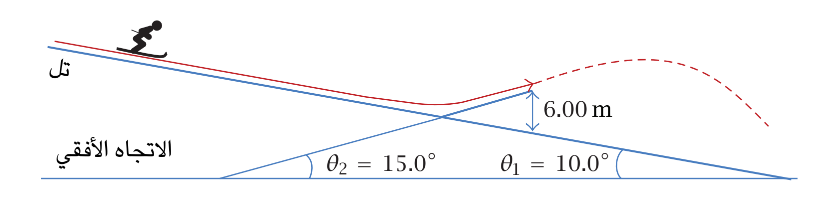
أوجد:

(أ) سرعته عند $t = 2\,\text{sec}$.

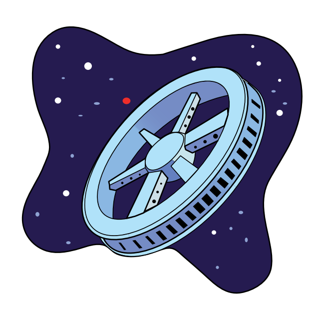
(ب) عجلته عند $t = 5\,\text{sec}$.

(جـ) سرعته المتوسطة بين $t = 1\,\text{sec}$ و$t = 3\,\text{sec}$.

المسألة ١-٧. أقيمت رياضة للقفز على الثلج فوق تل يميل بزاوية ثابتة مقدارها 10.0° أسفل الاتجاه الأفقي. وكانت نقطة القفز على ارتفاع $6.00\,\text{m}$ رأسيًّا فوق سطح التل. ويميل المنحدر عند نقطة القفز لأعلى بزاوية 15.0° أعلى الاتجاه الأفقي. يقفز المتسابق بسرعة مقدارها $30.0\,\text{m/s}$ (دون أن يقوم بأي دفعٍ إضافيٍّ بواسطة ركبتيه). احسب المسافة الأفقية من نقطة القفز حتى نقطة الهبوط.



شكل ١-١٧: رسم المسألة ١-٧.

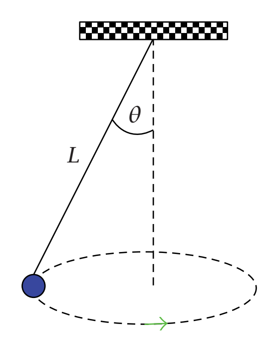


شكل ١-١٨: رسم المسألة ١-٨.

المسألة ١-٨. محطة فضاء على شكل كعكة لها إطار خارجي نصف قطره 1 km. ما الزمن الدوري الذي ينبغي أن تدور به لكي يتعرض شخص على الإطار لعجلة مقدارها g/5؟

المسألة ١-٩. قطار فائق السرعة يسير خلال الممر الشمالي الشرقي (من مدينة بوسطن إلى واشنطن العاصمة) بسرعته القصوى التي يبلغ مقدارها 300 km/h. إذا كانت أقصى عجلة يتعرض لها الركاب على متن القطار لا تزيد عن 0.05 g، ما أقل نصف قطر ممكن لانحناء أي لفة على المسار؟ [هل سيكون من المفيد إمالة المسار؟]

المسألة ١-١٠. في بندول مخروطي، عُلِّقَت كرة في نهاية وتر لتتحرك في دائرة أفقية بمقدار سرعة ثابت قيمته 1.21 m/s (انظر شكل ١-١٩). إذا كان طول الوتر 1.20 m ويصنع زاوية مقدارها 20.0° مع الاتجاه الرأسي، أوجد عجلة الكرة.



شكل ١-١٩: رسم المسألة ١-١٠.

الفصل الثاني

قانونا نيوتن الأول والثالث: استاتيكا الجسيمات

لعل السمة الأكثر جذبًا للاهتمام بالميكانيكا الكلاسيكية هي «اقتصادها المنطقي». فكل شيء مُشتَق من قوانين نيوتن الثلاثة للحركة. [حسنًا، تقريبًا كل شيء. ولكن على المرء أيضًا معرفة بعض المعلومات عن القوى المؤثرة.] ومن الضروري بالطبع فهم ما تقضي به القوانين بصورة واضحة، واكتساب بعض الخبرة في تطبيق القوانين في حالات محددة.

نحن معنِيُّون هنا بالقانونين الأول والثالث، وسوف يناقَش القانون الثاني في الفصل التالي. والوقت المنقضي في تأمُّل معنى هذه القوانين (أقل ما يُقال عنه) ليس وقتًا ضائعًا.

(١) قانون نيوتن الأول: القوى

القانون الأول، كما عبَّر عنه نيوتن بكلماته هو: «كل جسم يحافظ على حالته من سكون أو حركة منتظمة في خط معتدل، إلا إذا أُجبر على تغيير هذه الحالة بواسطة قوى أثَّرت عليه.»[1] بلغتنا الحديثة، ينص القانون الأول على أن سرعة الجسم تظل ثابتة فقط إذا لم تكن هناك قوى مؤثرة عليه أو إذا كانت محصلة الجمع (المتجهي) للقوى المؤثرة عليه تساوي صفرًا. لاحظ أنه عندما نقول إن السرعة ثابتة، فإننا نعني أن كلًّا من مقدار واتجاه متجه السرعة يكون ثابتًا. نفترض في هذه العبارة أن جميع أجزاء الجسم لديها نفس السرعة؛ لأننا لا نعلم في هذه المرحلة المبكرة من المناقشة ما تعنيه «سرعة الجسم».

وهنا ينشأ فورًا سؤالان:

(أ) ماذا تعني القوة؟
(ب) بالنسبة لأي مجموعة من المحاور يكون القانون الأول صحيحًا؟ (لاحظ أن أي جسم ساكن أو متحرك بسرعة ثابتة مقيسة بالنسبة لمجموعةٍ ما من المحاور قد يكون متحركًا بعجلة ما بالنسبة لمجموعة محاور أخرى.)

إجابتا السؤالين (أ) و(ب) مترابطتان. في الواقع، إذا كان في نيتنا إدخال مفهومٍ معقَّد بدرجة كافية للقوة، فسيكون القانون الأول صحيحًا بالنسبة لكلِّ مجموعة من المحاور ولا يضيف جديدًا. عبارة «المفهوم المعقَّد بدرجة كافية للقوة» تتضمن افتراض أنه طالما رأينا سرعة الجُسيم تتغيَّر فإن هناك قوة مؤثِّرة على الجُسيم حتى لو لم نكُن نرى مصدر هذه القوة.

سوف نُصِرُّ على إعطاء كلمة «قوة» معنًى محددًا جدًّا يناظر بدقة طريقةَ استخدامنا للكلمة في لغتنا اليومية. نُعَرِّف القوة أنها «الدفع أو الشد المؤثِّر بواسطة قطعة من المادة على قطعة أخرى من المادة.» هذا التعريف ليس كميًّا (سوف نقدم بعد قليل قياسًا كميًّا للقوة) ولكن يؤكد على حقيقة أنه يحق لنا أن نتكلم عن «القوة» فقط عندما نتمكن من التعرُّف على قطعة المادة التي تبذل القوة وقطعة المادة التي تُبذل عليها القوة.

ستوضح بعض الأمثلة البسيطة ما نعنيه وما لا نعنيه عندما نستخدم كلمة «القوة».

- مع سقوط حجر في اتجاه الكرة الأرضية نلاحظ أن سرعته تتغير، ونقول إن الكرة الأرضية تشُد الحجر. هذا الشد (الذي نسميه القوة الجاذبة التثاقلية التي تؤثر بها الكرة الأرضية على الحجر) هو استخدام مقبول لمصطلح «القوة»؛ لأننا نستطيع رؤية قطعة المادة (الكرة الأرضية) التي تؤثر بهذه القوة. وقد تعلمنا، بالطبع، التعايش مع فكرة أن قطعة من المادة يمكنها التأثير بقوة ما على قطعة أخرى من المادة دون أن تلمسها مباشرة.
- تدبر موقف سيدة جالسة داخل عربة سكة حديد متحركة. تشدها الكرة الأرضية لأسفل، بينما يؤثِّر عليها المقعد الذي تجلس عليه بقوة لأعلى. إذا كانت هناك ملفات زنبركية في المقعد، فإن هذه القوة المؤثِّرة لأعلى ناشئة من

الملفات الزنبركية، التي تكون مضغوطة. (هناك «زنبركات» بكل مقعد، لكن قد تكون هذه الزنبركات جامدة. عندما تجلس على مقعد خشبي فإنك تهبط قليلًا داخل المقعد، ضاغطًا الخشب إلى أن يؤثر عليك بقوة لأعلى مساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه للشد الذي تؤثر به الكرة الأرضية عليك لأسفل.) إذا تسارعت العربة في الاتجاه الأمامي، فإن المقعد يؤثر بقوة إضافية على السيدة، وتكون هذه القوة متجهةً للأمام وتنشأ بواسطة ظهر المقعد. عند فحص الملفات الزنبركية (أو المطاط الإسفنجي) في ظهر المقعد سيتبين أنها مضغوطة أثناء الفترة الزمنية التي يتسارع خلالها القطار. أثناء تسارع القطار ستشعر السيدة بأن شيئًا ما يدفع ظهرها ناحية المقعد. ومع ذلك، لا نعترف بأن هناك أي قوة تدفع السيدة ناحية الجزء الخلفي من العربة؛ لأننا لا نجد أمامنا أي قطعة من المادة تؤثِّر بهذه القوة على السيدة. (إذا كان للعربة نافذة خلفية وإذا نظرنا من خارج هذه النافذة واستطعنا رؤية قطعة ضخمة من مادة كبيرة في حجم كوكب خلف العربة، يمكننا القول إن قوة الجاذبية التي يؤثر بها هذا الكوكب تشد السيدة نحو الخلف. لكننا بالطبع لا نرى هذا.)

إذا كانت أرضية العربة ملساء جدًّا، وإذا كان هناك صندوق ما موضوع على الأرضية، فإن الصندوق سيبدأ في التحرك نحو الخلف مع تسارع العربة. إذا قمنا بقياس الموضع والسرعة بدلالة محاور مرتبطة بالعربة، فسوف نقول إن الصندوق يتسارع نحو الجزء الخلفي للعربة. ومع ذلك، لا نقول إن هناك قوة تدفع الصندوق نحو الخلف لأننا لا نستطيع أن نجِدَ أمامنا أي قطعة من المادة تؤثِّر بهذه القوة؛ لذلك، بمفهومنا المحدود للقوة، لا يكون قانون نيوتن الأول صحيحًا إذا استخدمنا محاور مرتبطة بالعربة المتسارعة. من ناحية أخرى، إذا استخدمنا محاور مرتبطة بسطح الأرض، يكون قانون نيوتن الأول صحيحًا. وبالنسبة لهذه المحاور فإن سرعة الصندوق لا تتغير؛ وهذا متسق مع مقولة أنه لا توجد قوة تؤثر على الصندوق.

سوف نرى أن المفهوم البسيط نسبيًّا «للقوة» الذي عرَّفناه سيكون كافيًا إلى حَدٍّ كبير لتأدية أغراضنا. إننا نصادف العديد من القوى في حياتنا اليومية، ولكن إذا نظرنا بتمعُّن أدق، فإنه يمكن تفسيرها جميعًا بدلالة الجذب التثاقُلي الذي تؤثر به قطعة واحدة من المادة (تكون عادة الكرة الأرضية) على أخرى. سوف نشير من

حين لآخر إلى قوى «التَّماس» التي يؤثر بها أحد الجسمين على الآخر عندما يكون سطحاهما متلامسين. يمكن أن يكون لقوى «التماس» هذه، بوجه عام، مركب عمودي على السطح ومركب مماسٌّ للسطح؛ ويسمى المركَّبان على التوالي بـ «القوة العمودية» و«قوة الاحتكاك». إذا فحصنا المصدر الميكروسكوبي لهذه القوى، فسنجد أنها قوى كهربية بين سطح جزيئات (أو ذرات) أحد الجسمين وبين سطح جزيئات الجسم الآخر. حتى لو لم يكُن للجزيئات أي محصلة للشحنة، فكل جزيء يحتوي على شحنات موجَبة وسالبة، وعندما يقترب جزيئان من بعضهما بدرجة كافية، لا تتلاشى تمامًا القوى بين الشحنات المتنوعة ويكون هناك قوة محصلة. لحسن الحظ، لا يتطلب تطبيق قوانين نيوتن فهمًا ميكروسكوبيًّا مفصلًا لما يسمى بقوى التماس؛ ومع ذلك، فإننا نرفض إدراج أي قوة على لائحتنا إلا إذا كُنَّا متأكدين من إمكانية تفسيرها في النهاية بدلالة القُوَى التثاقلية أو القوى الكهربية أو المغناطيسية أو كلتيهما. (الجسيمات الأساسية التي تكوِّن المادة تتعرَّض لقوى تثاقلية وكهرومغناطيسية، وأيضًا لنوعين آخرين من القوى: القوة القوية والقوة الضعيفة. لا تلعب هاتان القوتان الأخيرتان دورًا في ملاحظاتنا اليومية.)

(٢) الأُطر القصورية

والآن، بعد أن عرفنا ما نعنيه بكلمة قوة، نستطيع أن نسأل: «بالنسبة لأي محاور يكون صحيحًا أن الجسيم الذي لا تؤثر عليه قوى يتحرك بسرعة ثابتة؟» بمعنى: بالنسبة لأي محاور يكون قانون نيوتن الأول صحيحًا؟ كثيرًا ما تُسمَّى مجموعة المحاور بـ «إطار الإسناد» أو «الإطار المرجعي»، وتسمى تلك المحاور التي يكون قانون نيوتن الأول صحيحًا بالنسبة إليها الأُطر القصورية.

من المهم ملاحظة أنه، نتيجة لقانون نيوتن الأول، يوجد أكثر من إطار قصوري. إذا كانت مجموعة ما من المحاور XYZ إطارًا قصوريًّا، وإذا كان هناك مجموعة أخرى من المحاور $X'Y'Z'$ تتحرك بسرعة ثابتة دون دوران بالنسبة إلى XYZ؛ فإن $X'Y'Z'$ تكون هي أيضًا إطارًا قصوريًّا. وهذا ينتج من حقيقة أن أي جسيم له سرعة ثابتة بالنسبة إلى المحاور XYZ سيكون له أيضًا سرعة ثابتة بالنسبة إلى المحاور $X'Y'Z'$.

لقد رأينا بالفعل أن مجموعة المحاور المرتبطة بعربة سكة حديد متسارعة ليست إطارًا قصوريًّا، لكن مجموعة المحاور المرتبطة بالكرة الأرضية تُعَدُّ إطارًا قصوريًّا.

في الحقيقة هذا ليس صحيحًا تمامًا. بالنسبة لمعظم الأغراض، تبدو المحاور المرتبطة بالكرة الأرضية إطارًا قصوريًّا. ومع ذلك، نتيجة لدوران الكرة الأرضية، تدور هذه المحاور بالنسبة إلى خلفية النجوم البعيدة. إذا أعطيت قرص لعبة الهوكي سرعةً كبيرةً في اتجاه الجنوب على حلبة تزلُّج جليدية ملساءَ تمامًا في مدينة فيلادلفيا، فإنه لن ينتقل في خط مستقيم تمامًا بالنسبة إلى المحاور المرتبطة بسطح الجليد، بل سينحرف قليلًا نحو الغرب بسبب دوران الكرة الأرضية. هذا التأثيرُ مهمٌّ في المدفعية البحرية ويوضح أن المحاور المرتبطة بالكرة الأرضية ليست إطارًا قصوريًّا تامًّا. إن مجموعة المحاور الأفضل — وإن كانت أقل سهولة — هي تلك التي لا تدور بالنسبة إلى النجوم البعيدة والتي تتحرك نقطة أصلها مع مركز الكرة الأرضية.

«بندول فوكو» ظاهرة أخرى من الظواهر التي توضح أن المحاور المرتبطة بسطح الكرة الأرضية ليست إطارًا قصوريًّا تامًّا. إن الكرة الرأسية المربوطة بوَتَرٍ متدلٍّ من سقف مبنًى في القطب الشمالي أو الجنوبي سوف تتذبذب في مستوًى لا يدور بالنسبة للنجوم البعيدة، بينما تدور الكرة الأرضية بالنسبة إلى مستوَى البندول.

كان نيوتن مهتمًّا بالأساس بحساب مدارات الكواكب. لهذا استخدم محاوِرَ لها نقط أصل ثابتة بالنسبة إلى الشمس، ولا تدور بالنسبة للنجوم البعيدة. وهذه المجموعة هي أفضل إطار قصوري استطاع أن يَجِدَهُ، ويبدو أنه رأى أن من البدهي أن تكون هذه المحاور ثابتة في «الفضاء المطلق» الذي «يظل دائمًا متشابهًا وغير قابِل للتحرُّك دون أن يكون له علاقة بأي شيء خارجي.» لاحظ كبلر أن، بالنسبة لهذه المحاور، الكواكب تتحرك في مدارات إهليجية، وأن الأزمنة الدورية للكواكب (أي الزمن اللازم لكي يصنع الكوكب دورة واحدة حول الشمس) تتناسب طرديًّا مع نصف القطر الأكبر للإهليج مرفوعًا إلى الأُس ٣ / ٢. استخدم نيوتن قوانينه في الميكانيكا، بالإضافة إلى قانونه العام للجاذبية (الذي أعطى معادلة كمية للقوة التي تبذلها الشمس على الكواكب) لتفسير ملاحظات كبلر، بفرض أن المحاور قيد البحث تُكوِّن إطارًا قصوريًّا أو تُقَدَّر كذلك تقريبًا. الأكثر من ذلك، استطاع أن يحسب مدار مُذَنَّب هالي بدقة هائلة.

يقول معظم (وربما كل) الفيزيائيين اليوم إن مفهوم «الفضاء المطلق» يعتبر مفهومًا مراوغًا، أو لا معنى له، وأن الأُطُر القصورية تُعَرَّف فيزيائيًّا بتأثير المادة البعيدة. من العادي — عندما نسرد القوى المؤثرة على جسم — أن نقوم فقط بتضمين القوى المؤثرة عليه بواسطة أجسام أخرى قريبة منه بدرجة كافية؛ مثلًا، إذا كان الجسم

كوكبًا، نأخذ في الاعتبار قوة الجاذبية التي تؤثر بها الشمس على الكوكب، لكننا لا نأخذ في الاعتبار صراحة القوة التي تؤثر بها النجوم البعيدة على الكوكب (حتى إننا لا نعلم في واقع الأمر كيف نحسب تلك القوة). وبالرغم من ذلك، فإن تأثير النجوم البعيدة لا يمكن تجاهله لأنها تحدد أيَّ الأُطُر يكون قصوريًّا؛ أي إنها تُمَيِّز المحاور المفضلة التي تكون قوانين نيوتن صحيحة بالنسبة لها. إن الصفة المهمة للمحاور المرتبطة بالشمس ليست أنها ساكنة في فضاء مطلق، وإنما أنها تسقُط بحرية تحت تأثير جاذبية المادة الكلية خارج النظام الشمسي.

في معظم الأمثلة المنزلية التي سوف نناقشها، يمكن اعتبار المحاور المرتبطة بسطح الكرة الأرضية أنها إطار قصوري. وفي مناقشة حركة الكواكب سوف نستخدم محاور مرتبطة بالشمس ولا تدور بالنسبة للنجوم البعيدة.

(٣) تعريف كَمِّي للقوة، علم استاتيكا الجسيمات

ينص قانون نيوتن الثاني — الذي سوف نناقشه في الفصل التالي — على أن عجلة أي جسم تتناسب طرديًّا مع القوة الكلية المؤثرة على هذا الجسم. يستخدم بعض المؤلِّفين هذه الحقيقة أساسًا لتعريف كَمِّي للقوة. سوف نطرح تعريف «القوة» كَمِّيًّا قبل مناقشة القانون الثاني. وبذلك سيكون من الواضح أن القانون الثاني تقريرٌ عن الكون، وليس مجرد تعريف لكلمة «قوة». وسوف نعتاد عندئذٍ على تحليل القوى عن طريق دراسة عدد من أمثلة الاتِّزان الاستاتيكي للجسيمات.

بالنسبة إلى وحدة القوة، اخترنا حالة الدفع أو الشد البسيطة التي يسهُل تَكرارُها. وهذا ينتج، على سبيل المثال، من زنبرك معياري ممدود بكَمِّيَّة معيارية عند درجة حرارة معيارية. وتكون وحدتا القوة إذن هما القوة المؤثِّرة بواسطة اثنين من تلك الزنبركات المعيارية، مربوطين بالجسم ذاته ويشدانه في نفس الاتجاه. (حسب خواص الزنبرك، قد يكون هذا مماثلًا للقوة التي يؤثر بها زنبركٌ وحيدٌ ممدودٌ بضعف الكمية المعيارية أو لا يكون كذلك.)

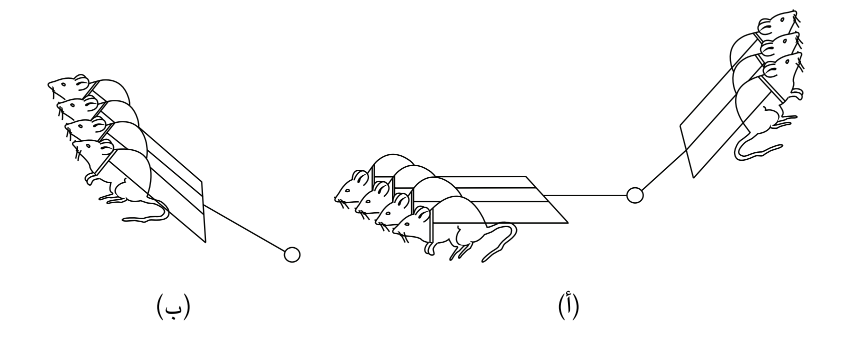
الأكثر غرابة من ذلك، إذا تخيَّلنا أن لدينا مصدرًا لفئران متماثلة، تشد دائمًا بكامل قوتها، يمكن إذن استخدام «الفأر» وحدة للقوة. يمكن تمثيل فأر واحد يشد في اتجاه معين بواسطة سهم طوله وحدة واحدة يشير في ذلك الاتجاه. ويمكن تمثيل ثلاثة فئران تجذب في نفس الاتِّجاه بسهم طوله ثلاث وحدات يشير في ذلك الاتجاه. يمكن تعميم

التعريف بسهولة على أعدادٍ كسرية من الفئران؛ فمثلًا، إذا وُجِد أن سبعة سناجب تشد في اتجاه معين، تصنع بالضبط نفس تأثير تسعة عشر فأرًا تشد في ذلك الاتجاه، فإننا عندئذٍ نمثل القوة التي يؤثر بها سنجاب واحد بسهمٍ طوله ١٩ / ٧ في الاتجاه الملائم. (بما أن أي عدد صحيح هو نهاية متوالية من الأعداد الكسرية؛ فإن التعريف مُعمَّم بسهولة على القوى التي تكافئ عددًا صحيحًا من الفئران. (وهو ليس مثل عدد من الفئران الصحيحة!)) وهكذا يمكن تمثيل أي دفع أو شد في اتجاه محدَّد بسهم في ذلك الاتجاه، ويكون طول السهم هو عدد الفئران اللازم لكي يحاكي بإتقان الدفع أو الشد المُعطى.

بما أننا أنشأنا طريقة لتمثيل القوى بواسطة أَسْهُم لها أطوال واتجاهات، فيبدو من البدهي تقريبًا أن القوى لها جميع خصائص المتجهات. وبالأخص عند افتراض وجود فريقين من الفئران مربوطين بنفس النقطة على نفس الجسم. ليكن أحد الفريقين متكونًا من N_1 فأرًا تشد جميعها في نفس الاتجاه (ممثلًا بمتجه $\vec{N_1}$)، وليكن الفريق الآخر متكونًا من N_2 فأرًا تشدُّ جميعها في اتجاه آخر (ممثلًا بمتجه $\vec{N_2}$). أليس من الواضح أن فريقي الفئران اللذين يشدان بالتزامن يكافئان — من جميع النواحي — فريقًا واحدًا من الفئران حيث يكون اتجاه هذا الفريق الوحيد هو اتجاه المتجه $\vec{N_1}+\vec{N_2}$ ويكون عدد الفئران في الفريق الوحيد $|\vec{N_1}+\vec{N_2}|$؛ أي طول المتجه $\vec{N_1}+\vec{N_2}$؟ أعتقد أن لدينا هنا نقطة مهمة تحتاج إلى برهان ويمكن برهنتها دون الاستعانة بتجربة. ولأن العديد من القراء قد يعتبرون هذا البرهان استطرادًا غير ضروري، فإننا سنعرضه بوصفه ملحقًا (ملحق (ج). [إثبات أن القوة كمية متجهة]).

على أي حال، ينبغي أن نعي بوضوح أنه عندما نُمَثِّل القوى بمتجهات، فإننا لا نعني فقط أن للقوة مقدارًا واتجاهًا، وإنما نعني أيضًا أن «أي قوتين (كلٌّ منهما يمثلها متجه) تؤثران بالتزامن على نفس النقطة تكافئان قوة واحدة، مُمَثَّلة بمتجه حاصل جمع متجهي هاتين القوتين.» ينتج من ذلك أن تأثير أكثر من قوتين على نفس النقطة، يكافئ تأثير قوة واحدة مُمَثَّلة بمتجه حاصل جمع المتجهات التي تمثل القوى المنفردة.

يمكننا الآن مناقشة اتِّزان الكتل النقطية. و«الكتلة النُقَطيَّة» هي جسم صغير جدًّا لدرجة تجعلنا نقيس فقط موضعه مع إهمال حقيقة أن أجزاء الجسم المختلفة قد تكون لها سرعات مختلفة. سنرى حالًا — نتيجة لقانون نيوتن الثالث — أن قوانين نيوتن لا تُطَبَّق فقط على الكتل النقطية ولكن تُطَبَّق أيضًا على أجسام مركبة أكبر حجمًا تتكون من عدة كتل نقطية.



شكل ٢-١: فريقان من الفئران مربوطان بنفس النقطة على نفس الجسم (شكل (أ) بالأعلى). يتكون أحد الفريقين من N_1 فأرًا تشد في نفس الاتجاه الذي يمثله المتجه $\vec{N}_1$ ويتكون الفريق الآخر N_2 من فأرًا تشد في نفس الاتجاه الذي يمثله المتجه $\vec{N}_2$. أليس من الواضح أن فريقي الفئران مكافئان لفريق واحد (شكل (ب))؛ حيث يكون اتجاه الفريق الوحيد هو اتجاه المتجه $\vec{N}_1 + \vec{N}_2$ وعدد الفئران في الفريق الوحيد هو مقدار المتجه $\vec{N}_1 + \vec{N}_2$؟ للبرهان، انظر ملحق (ج).

يقال إن جسمًا ما في حالة اتزان عندما يكون ساكنًا (ليس فقط للحظة، ولكن بصورة مستديمة أو على الأقل لفترة زمنية محددة؛ فإذا رُميت كرة رأسيًّا لأعلى، فسوف تكون ساكنة لحظيًّا في اللحظة التي تصل عندها إلى أعلى نقطة. الكرة لا تكون في حالة اتزان عند تلك اللحظة؛ لأنها لا تبقى ثابتة لفترة زمنية محددة، كما أن القوة المحصلة المؤثرة على الكرة ليست صفرًا. من ناحية أخرى، الكرة المستقرة على الأرض تكون في حالة اتزان.) أو متحركًا بسرعة ثابتة. طبقًا لقانون نيوتن الأول، الجسم وهو في حالة اتزان لا تؤثر عليه قوة.

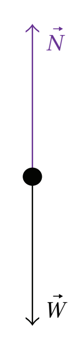
أبسط مثال للاتزان هو جسيم خارج مجال المجموعة الشمسية، يبعد بدرجة كافية عن الشمس والكواكب بحيث يكون من الممكن إهمال قوى الجاذبية التي يتعرض لها. هذا المثال لا يثير الاهتمام نظرًا لعدم وجود قُوًى مؤثرة على الجسيم. أمثلة الاتزان الأكثر أهمية — وهي ما نصادفها في حياتنا اليومية — هي تلك الحالات التي يكون فيها صافي (أو «محصلة») القوة على جسم صفرًا، رغم وجود عدة قوى مؤثرة على الجسم؛ لذلك فإن اتِّزان الجسم ينتج من حقيقة أن المجموع المتجهي لجميع القوى المؤثرة على الجسم يكون صفرًا.

(٤) أمثلة لحالة الاتزان الاستاتيكي للجسيمات

مثال ٢-١ (اتزان استاتيكي لكتلة على الأرض). في أول مثال للاتزان، دعنا نعتبر كتلة ساكنة على الأرضية. نفترض هنا أن الكتلة يمكن التعامل معها على أنها «كتلة نقطية» تتبع قانون نيوتن الأول. حتى لو لم تكُن الكتلة صغيرة جدًّا، فإننا سنرى حالًا أن قانون نيوتن الثالث يبرر اعتبارها «كتلة نقطية».

تؤثر قوتان على الكتلة: تشد الكرة الأرضية الكتلة لأسفل وتدفع أرضية الغرفة الكتلة لأعلى. ولأنه ينبغي للقوة الكلية على الكتلة أن تتلاشى، فلا بد أن تكون القوتان متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه. رغم أنهما مختلفتان تمامًا من حيث المنشأ. فالشد الذي تؤثر به الكرة الأرضية لأسفل (يسمى عادة «الجاذبية» أو «الوزن» في الاصطلاح الشائع) هو ببساطة المجموع المتجهي لقوى الجاذبية التي تؤثر على الكتلة بواسطة كل جزيء من جزيئات الكرة الأرضية. إن النسبة التي تسهم بها الجزيئات القريبة (في نطاق بضعة أميال من الكتلة) في هذا المجموع تكون مهملة، وقوة الجذب المؤثرة على الكتلة ناجمة في الأساس عن انجذاب الكتلة إلى الجزيئات البعيدة؛ لأن عدد الجزيئات البعيدة كبير للغاية. من الناحية الأخرى، القوة التي تؤثر بها أرضية الغرفة لأعلى هي قوة كهربية قصيرة المدى جدًّا (وهي قوة «التماس» التي ذكرناها بالفعل) تؤثر بها الجزيئات الموجودة بسطح أرضية الغرفة على الجزيئات الموجودة في أسفل الكتلة.

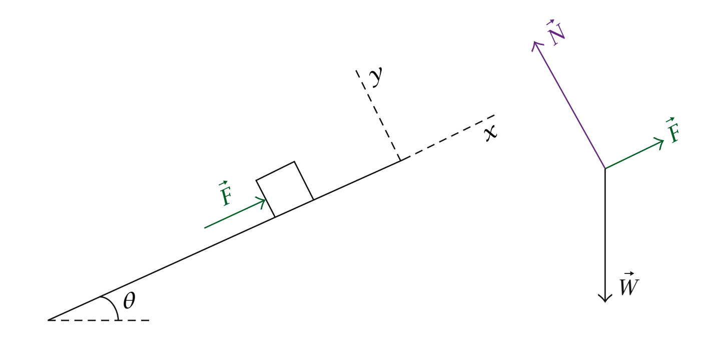
يسمى مقدار قوة الجاذبية التي تؤثر بها الكرة الأرضية على جسم ما وزن الجسم، وعادة ما يرمز له بالحرف W. تعتمد قيمة W العددية على ما نختاره ليكون وحدة القوة. فيما يسمى بالنظام البريطاني للوحدات، لا يكون الفأر هو وحدة القوة وإنما الرطل. يمكن تعريف الرطل بأنه قوة الجاذبية التي تؤثر بها الكرة الأرضية على جسم معياري معين موضوع في مكان محدد على سطح الكرة الأرضية. فمثلًا: يمكن أن يكون هذا الجسم ٤٥٤ سنتيمترًا مكعبًا (٢٧,٧٠ بوصة مكعبة) من الماء عند درجة حرارة ٤ درجات مئوية وتحت الضغط الجوي، وموجودًا في تقاطع شارع الثالث والثلاثين مع شارع والانت بمدينة فيلادلفيا. أما وحدة القوة في النظام المتري فهي النيوتن، وتساوي تقريبًا ٠,٢٢٥ رطلًا. [لاحظ أن محرك البحث جوجل سوف يقوم بإجراء العديد من التحويلات الشائعة بالنيابة عنك ليست هناك حاجة لحفظ معاملات تحويل معينة. غير أنه من المفيد معرفة (على أقل تقدير) معاملات التحويل الشائعة، مثلًا: متر ↔ قدم،



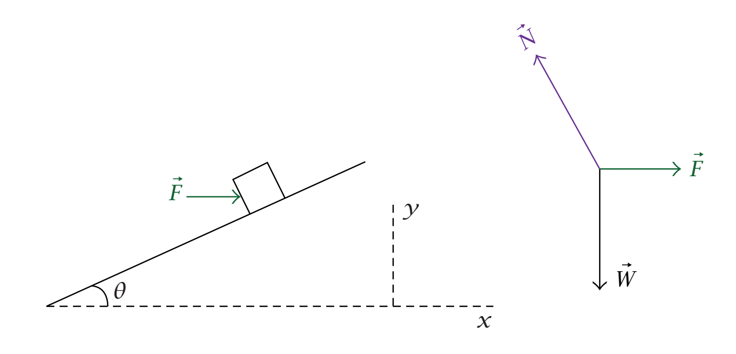
شكل ٢-٢: مخطط الجسم الحر لكتلة مستقرة على أرضية الغرفة. $\vec{W}$ هي قوة الجاذبية التي تؤثر بها الكرة الأرضية على الكتلة. $\vec{N}$ هي قوة التماس التي تؤثر بها أرضية الغرفة على الكتلة.

سنتيمتر ↔ بوصة، كيلووات ↔ حصان، وغيرها.] غالبًا ما نختصر وحدة النيوتن إلى الحرف N. ومن المفيد دائمًا إنشاء مخطط جسم حر تُمَثَّل فيه كلٌّ من القوى المؤثرة على الجسم بواسطة متجه. عادة ما تُرسم جميع المتجهات نابعة من مصدر مشترك. إذا كان الجسم في حالة اتزان، فإن المجموع المتجهي لجميع القوى في مخطط الجسم الحر يكون صفرًا. مخطط الجسم الحر في المثال الحالي بسيط للغاية (شكل ٢-١) ولا يضيف شيئًا لوصفنا الحرفي. في الأمثلة الأكثر أهمية التالية، يمكن الحصول على استنتاجات مقاديرية من الرسم البياني للجسم الحر.

مثال ٢-٢ (كتلة في حالة اتزان على منحدر لا احتكاكي). اعتبر كتلة في حالة اتزان على مستوى مائل أملس. تشد الكرة الأرضية الكتلة لأسفل ويؤثر المستوى على الكتلة بقوة تماس في اتجاه متعامد على المستوى. من المؤكد أن هناك ضرورة لأن تؤثر قوة ثالثة على الكتلة لكي تجعلها في حالة اتزان. نعلم من الخبرة أن اتجاه هذه القوة الثالثة لا يتحدد بطريقة وحيدة. فمثلًا، يمكن الحفاظ على اتزان الكتلة بقوة مناسبة تؤثر موازية للمستوى في الاتجاه الصاعد (شكل ٢-٣) أو بقوة أفقية مناسبة (شكل ٢-٤). في الواقع، هناك متَّصَل من الاتجاهات المحتملة للقوة الثالثة. ولكي تكون الكتلة في



شكل ٢-٣: الكتلة مُثَبَّتة في مكانها بواسطة قوة تؤثر في اتجاه موازٍ للمنحدر. يتضمن مخطط الجسم الحر ثلاث قوى.



شكل ٢-٤: انظر مثال ٢-٢(ب). هذه المرة ثُبِّتت الكتلة في مكانها بواسطة قوة مؤثِّرة أفقيًّا.

وضع اتزان، لا بد أن يكون للقوة الثالثة المقدار المناسب. وهو ما يعتمد على الاتجاه الذي تؤثر فيه.

(أ) دعنا ننظر أولًا للحالة التي تُطَبَّق فيها القوة الثالثة في اتجاه موازٍ للمنحدَر. يعرض مخطط الجسم الحر القوى المؤثرة على الكتلة. $\vec{W}$ هي قوة الجاذبية المؤثرة بواسطة الكرة الأرضية، $\vec{N}$ هي قوة التماس المؤثرة بواسطة المنحدَر و$\vec{F}$ هي القوة الثالثة. أظهرنا هذه القوة لتبين دفعة من أسفل موازية للمنحدَر، لكن ينتج نفس

مخطط الجسم الحر من «شَدٍّ» في اتجاه موازٍ للمنحدَر من نقطة تماس على جانب الجسم ناحية الاتجاه الصاعد. يمكن في الحالة الثانية توفير هذه القوة بواسطة وتر؛ حيث تكون $\vec{F}$ عندئذٍ هي الشد في الوتر. نرغب في حساب $\vec{F}$ و$\vec{N}$.

ينص قانون نيوتن الأول على:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{W} = 0. \tag{2–1}$$

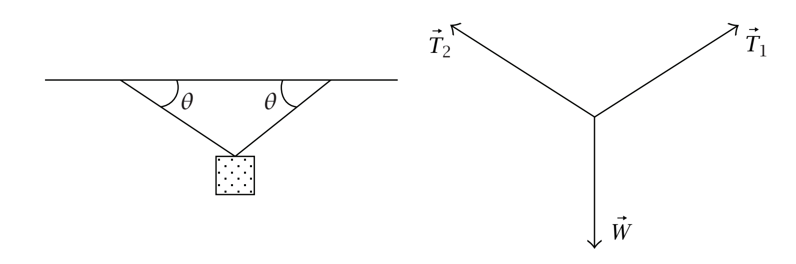
هذه معادلة متجهيَّة، وتكون صحيحة فقط إذا كان مجموع مركبات x للمتجهات الثلاثة صفرًا وكان مجموع مركبات y صفرًا أيضًا. يمكننا اختيار اتجاهي المحورين x وy بالكيفية التي تلائمنا، والاختيار الأكثر ملاءمة هو أن يكون المحور x موازيًا للمنحدَر والمحور y عموديًّا على المنحدر. عندئذٍ تكون مركبتا x وy للمعادلة (2–1) هما:

$$F - W \sin\theta = 0, \tag{2–2a}$$

$$N - W \cos\theta = 0. \tag{2–2b}$$

وبذلك يكون $F = W\sin\theta$ و$N = W\cos\theta$. لاحظ أننا لو أخذنا المحور x في الاتجاه الأفقي والمحور y في الاتجاه الرأسي، لكانت مركبتا x وy للمعادلة (2–1) هما $F\cos\theta - N\sin\theta = 0$، و$F\sin\theta + N\cos\theta - W = 0$، وهو ما يؤدي مرة أخرى إلى $F = W\sin\theta$ و$N = W\cos\theta$.

(ب) إذا أثرت القوة الثالثة في الاتجاه الأفقي (نسميها $\vec{F}$ مرة أخرى)، فإن مخطط الجسم الحر يكون كما بالشكل (٢-٤). إذا أخذنا المحور x في الاتجاه الأفقي والمحور y في الاتجاه الرأسي، تكون مركبات المعادلة المتجهية $\vec{F} + \vec{N} + \vec{W} = 0$ هي $F - N\sin\theta = 0$ و$N\cos\theta - W = 0$؛ وبذلك يكون $N = W/\cos\theta$ و$F = W\tan\theta$. لاحظ التعبيرين المختلفين لحساب N في هذه الحالة والحالة السابقة، ولاحظ أيضًا أن F في هذه الحالة تصبح لا نهائية كلما اقتربت θ من $90°$. هل يتفق هذا مع «حدسك الفيزيائي»؟



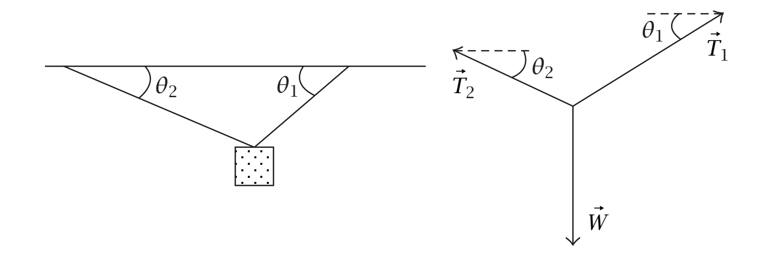
شكل ٢-٥: رسم توضيحي ومخطط الجسم الحر للمثال ٢-٣.

مثال ٢-٣ (كتلة معلقة من السقف بوترين). اعتبر كتلة معلقة بوترين متساويي الطول، كلٌّ منهما متصل بالسقف ويصنع زاوية θ مع الاتجاه الأفقي (انظر شكل ٢-٥). يعرض مخطط الجسم الحر القوى المؤثرة على الكتلة. $\vec{W}$ هي قوة الجاذبية المؤثرة بواسطة الكرة الأرضية و$\vec{T}_1$ و$\vec{T}_2$ هما القوتان المؤثرتان بواسطة الوترين. من التماثل الموجود في المسألة يتأكد لنا أن $\vec{T}_1$ و$\vec{T}_2$ لهما نفس المقدار، الذي سنسميه T. إذا أخذنا المحور x في الاتجاه الأفقي والمحور y في الاتجاه الرأسي، تكون مركبتا المعادلة المتجهية $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{W} = 0$ هما:

$$\begin{aligned} T\cos\theta - T\cos\theta &= 0, \\ 2T\sin\theta - W &= 0. \end{aligned} \tag{2–3}$$

لا تخبرنا المعادلة الأولى من هاتين المعادلتين شيئًا إلا أنها تؤكد وحسب افتراضنا بأن الشد في كلٍّ من الوترين يكون متساويًا. وتخبرنا الثانية بأن الشد المطلوب في الوترين هو $T = W/(2\sin\theta)$.

لاحظ أن الشد T يصبح كبيرًا جدًّا عندما تكون θ صغيرة جدًّا (في الواقع $T \to \infty$ عندما $\theta \to 0$). وهكذا نرى أن أي قوة جانبية متواضعة تُطَبَّق على سلك مشدود يمكنها كسر هذا السلك. ومع ذلك، إذا أثَّرنا بقوة جانبية في منتصف حبل مربوط من مادة النايلون، فإن الحبل سيتمدد، ولأن θ لا تظل صغيرة، فإن الشد في الحبل لن يصبح كبيرًا جدًّا.



شكل ٢-٦: رسم توضيحي ومخطط الجسم الحر للمثال ٢-٤.

مثال ٢-٤ (كتلة معلقة من السقف بواسطة وترين مختلفين في الطول). قد يكون الوتران في المثال السابق مختلفي الطول بحيث $\theta_1 \neq \theta_2$ (شكل ٢-٦). لاحظ أنه يجب ربط كلٍّ من الوترين بالكتلة على حدة. (لو كانت الكتلة معلقة من حلقة تنزلق بحرية على الوتر، فإن الكتلة ستنزلق حتى يصبح $\theta_1 = \theta_2$.) في المثال الحالي $T_1 \neq T_2$ وتكون مركبتا معادلة القوة هما:

$$\begin{aligned} T_1 \cos\theta_1 - T_2 \cos\theta_2 &= 0, \\ T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2 - W &= 0. \end{aligned} \tag{2–4}$$

بحل هاتين المعادلتين الخطيتين الآنيتين، نجد أن:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{W}{\sin\theta_1 + \cos\theta_1 \tan\theta_2}, \\ T_2 &= \frac{W}{\sin\theta_2 + \cos\theta_2 \tan\theta_1}. \end{aligned} \tag{2–5}$$

لاحظ أنه عندما تكون $\theta_1 = \theta_2$ فإن النتيجة تتفق مع نتيجة المثال السابق.

(٥) قانون نيوتن الثالث

لم نعتبر بعد الاتزان الاستاتيكي للأنظمة التي تتكون من عدة أجسام قد تؤثر بقوى على بعضها البعض. ولكي نناقش تلك الأنظمة ينبغي لنا تقديم خاصية مهمة جدًّا

للقوى لم تُذكر حتى الآن ولا يمكن استنتاجها من أي شيء ذُكِرَ هنا حتى هذه المرحلة. نص نيوتن لهذه الخاصية هو:

> لكل فعل يوجد دائمًا رد فعل عكسي مساوٍ؛ أو، الفعلان المتبادَلان المؤثران على جسمين يكونان دائمًا متساويين، ويتجهان نحو نقطتين متضادتين.

يسمى هذا قانون نيوتن الثالث للحركة. ويستمر نيوتن في إعطاء بعض الأمثلة عن القانون الثالث:

> إذا ضغطت على حجر بإصبعك، فإن الحجر يضغط أيضًا على إصبعك. إذا سحب حصان حجرًا مربوطًا بحبل، فإن الحصان (إذا جاز لي أن أقول ذلك) يُسحب للوراء نحو الحجر بنفس القدر ...

باللغة الحديثة، يمكن صياغة القانون الثالث كما يلي:

> لكل قوة يؤثر بها A على B، يؤثر B بقوة مساوية ومضادة في الاتجاه على A.

تسمى هاتان القوتان بزوج «الفعل – رد الفعل».

إن للقانون الثالث نتائج مهمة جدًّا ويلزم في الأساس الفهم التام لما يؤكده هذا القانون. دعنا ننظر مرة أخرى للمثال ٢-١ (الكتلة على الأرضية). هناك قوتان تؤثران على الكتلة: $\vec{W}$ (قوة الجاذبية المؤثرة بواسطة الكرة الأرضية) و$\vec{N}$ (قوة التماس المؤثرة بواسطة الأرضية). إن رد الفعل تجاه $\vec{W}$ هو قوة الجاذبية المؤثرة على سطح الكرة الأرضية بواسطة الكتلة. وتُمَثَّل هذه القوة بالمتجه $-\vec{W}$؛ أي إن مقدار قوة الجاذبية المؤثرة على سطح الكرة الأرضية بواسطة الكتلة هو W، لكن اتجاه هذه القوة لأعلى، ورد فعل $\vec{N}$ هو قوة التماس التي تؤثر على الأرضية بواسطة الكتلة. وكما ذكرنا من قبلُ، فإن هذه القوة هي قوة كهربية قصيرة المدى للغاية. لهذه القوة نفس مقدار $\vec{N}$ لكنها في الاتجاه المعاكس (لأسفل)، وتمثَّل بالمتجه $-\vec{N}$.

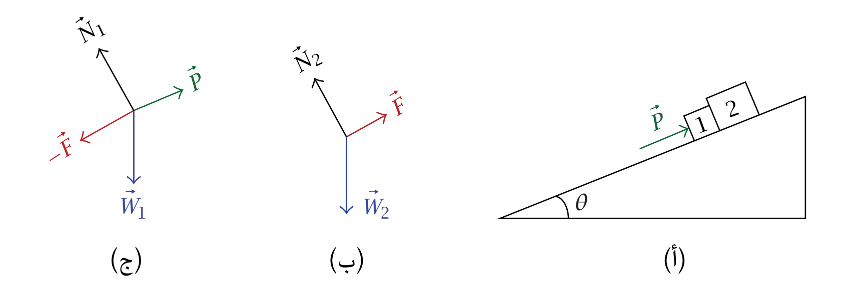
يوجد سوء فَهم شائع بأن $\vec{W}$ و$\vec{N}$ هما زوج من فعل ورد فعل. لاحظ أن القوتين في زوج من فعل ورد فعل لا تؤثِّران على نفس الجسم (إحدى القوتين تؤثِّر بواسطة A على B بينما تؤثر الأخرى بواسطة B على A). وبما أن $\vec{W}$ و$\vec{N}$ تؤثران على نفس الجسم (الكتلة)، فلا يمكن أن تكونا زوجًا من فعل ورَدِّ فعل. علاوة على ذلك، القوتان في زوج

من فعل ورد فعل تكونان من نفس المصدر الفيزيائي، مثلًا: كلتاهما قوتا جاذبية أو كلتاهما قوتا تماس. لكن $\vec{W}$ قوة جاذبية و$\vec{N}$ قوة تماس؛ لذا نرى مرة أخرى أنهما لا يمكن أن تكونا زوجًا من فعل ورد فعل.

القانون الثالث ينطبق حتى لو لم تكن الأجسام قيد الاعتبار في حالة اتزان. فمثلًا: أي جسم يسقط في اتجاه الكرة الأرضية يؤثر بقوة جاذبية على الكرة الأرضية تكون مساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه لقوة الجاذبية التي تؤثر بها الكرة الأرضية على الجسم. عندما يضرب مضرب في لعبة كرة القاعدة كرةً، فإن الكرة تؤثر على المضرب بقوة مساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه للقوة التي يؤثر بها المضرب على الكرة. لكن يوجد تناقض شائع يطرحه هذا السؤال: «إذا كانت القوة التي تؤثِّر بها الكرة على المضرب مساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه للقوة التي يؤثر بها المضرب على الكرة، فلماذا إذن تتسارع الكرة؟» الإجابة من قانون نيوتن الثاني الذي ينص على أن تسارُع الكرة يتناسب مع محصلة القوة المؤثرة على الكرة. وبذلك تكون القوة التي تؤثر بها القوة على المضرب ليست ذات صلة بمسألة تسارع الكرة من عدمه.

إن إغراء توصيف (على نحو خاطئ) $\vec{W}$ و$\vec{N}$ بأنهما زوج من فعل ورد فعل تنشأ جزئيًّا من حقيقة أنه عند الاتزان $\vec{N} = -\vec{W}$. إذا ما اعتبرنا حالة عدم اتزان تكون الكتلة فيها على أرضية مِصعد يتسارع لأعلى؛ فإن القوة المحصلة المؤثرة على الكتلة لا تساوي صفرًا؛ أي $\vec{W} + \vec{N} \neq 0$. تتسارع الكتلة في هذه الحالة لأعلى لأن قوة التماس لأعلى التي تؤثر بها الأرضية على الكتلة تكون أكبر من قوة الجاذبية لأسفل التي تؤثر بها الكرة الأرضية على الكتلة. ومع ذلك، يكون قانون نيوتن الثالث صالحًا: قوة الجاذبية التي تؤثر بها الكتلة على الكرة الأرضية تكون مساوية ومضادة لقوة الجاذبية التي تؤثر بها الكرة الأرضية على الكتلة، وقوة التماس التي تؤثر بها الكتلة على الأرضية تكون مساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه لقوة التماس التي تؤثر بها الأرضية على الكتلة.

على وجه الدقة، ليست جميع القوى في الطبيعة تتبع تمامًا القانون الثالث. (مع تعديل مناسب لمنطوق القانون الثالث، تكون جميع القوى خاضعة للقانون. ومع ذلك، فإن المنطوق المعدل يكون مختصرًا نوعًا ما وغير مفيد بالنسبة لهدفنا.) ومع ذلك، إذا ابتعدنا (كما سنفعل في هذا الكتاب) عن الحالات التي تنتج فيها كمية كبيرة من الإشعاع الكهرومغناطيسي، يكون القانون الثالث صحيحًا. أحد الأمثلة الشائعة لقوة تنتهك القانون الثالث، يُستَشهد به (على نحو خاطئ)، هو لقوة مغناطيسية بين قطعتي



شكل ٢-٧: رسم توضيحي للمثال ٢-٥. كتلتان موضوعتان في حالة اتزان بواسطة قوة $\vec{P}$ مؤثِّرة في اتجاه موازٍ للمنحدر. يبين شكل (ب). مخطط الجسم الحر للكتلة رقم ٢، بينما يبين شكل (ج). مخطط الجسم الحر للكتلة رقم ١.

سلك، تحمل كلٌّ منهما تيارًا كهربيًّا. في الواقع، لا يمكن قياس القوة بين قطعتين تحملان تيارًا كهربيًّا، القوة الوحيدة التي يكون لها مغزًى فيزيائي هي القوة بين حلقتي سلك مغلقتين، هذا ما يتبع القانون الثالث.

مثال ٢-٥ (الاتزان الاستاتيكي لكتل على منحدر). كتوضيح مبدئي لأحد استخدامات قانون نيوتن الثالث، نعتبر تعميمًا طفيفًا لمثال ٢-٢. افترض أن لدينا كتلتين على مستوًى مائل أملس، الكتلة العلوية (رقم ٢) تكون مدعومة بالكتلة السفلية (رقم ١)، والتي تكون مدعومة بدورها بواسطة قوة خارجية $\vec{P}$ تؤثر في اتجاه موازٍ للمنحدَر.

يتضمن مخطط الجسم الحر للكتلة رقم ٢ (انظر الشكل ٢-٧) القوة $\vec{W}_2$ التي تبذلها الأرض، والقوة $\vec{N}_2$ التي يبذلها المستوى، والقوة $\vec{F}$ التي تبذلها الكتلة رقم ١ على الكتلة رقم ٢. وسنفترض أن الكتلتين مستطيلتين لهما أسطح ملساء بحيث تكون $\vec{F}$ موازية للمستوى. يتضمن مخطط الجسم الحر للكتلة رقم ١ (بالإضافة إلى $\vec{W}_1$ و$\vec{N}_1$) القوة التي تؤثر بها الكتلة رقم ٢ على الكتلة رقم ١. من قانون نيوتن الثالث، تكون هذه القوة هي $-\vec{F}$. أضف إلى ذلك أن مخطط الجسم الحر للكتلة رقم ١ يجب أن يتضمَّن القوة الخارجية $\vec{P}$ المؤثرة على الكتلة رقم ١. لاحظ بوضوح أن $\vec{P}$ هي قوة مؤثرة على الكتلة رقم ١ وليس الكتلة رقم ٢. القوة المؤثرة بواسطة رقم ١ على رقم ٢ هي $\vec{F}$.

شرط الاتزان للكتلة رقم ٢ هو:

$$\vec{F} + \vec{N}_2 + \vec{W}_2 = 0 \tag{2–6a}$$

وللكتلة رقم ١ هو:

$$\vec{P} - \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{W}_1 = 0. \tag{2–6b}$$

مركبات المعادلتين (2–6a) و(2–6b) في اتجاه المحور الموازي للمنحدر والاتجاه العمودي عليه هي:

$$F - W_2 \sin\theta = 0,$$

$$N_2 - W_2 \cos\theta = 0,$$

$$P - F - W_1 \sin\theta = 0,$$

$$N_1 - W_1 \cos\theta = 0.$$

وهذه أربع معادلات في المجاهيل الأربعة P، F، N_1، N_2. نحصل بحلها على:

$$F = W_2 \sin\theta, \tag{2–6c}$$

$$P = (W_1 + W_2)\sin\theta, \tag{2–6d}$$

$$N_1 = W_1 \cos\theta, \tag{2–6e}$$

$$N_2 = W_2 \cos\theta. \tag{2–6f}$$

لاحظ أنه بدون القانون الثالث كان سيتحتم أن ندخل قوة أخرى مجهولة (القوة التي تؤثر بها الكتلة رقم ٢ على الكتلة رقم ١، التي يمكن تسميتها $\vec{F}'$). عندئذٍ سيكون لدينا أربع معادلات في خمسة مجاهيل ولن تكون المسألة قابلة للحل رياضيًّا.

في المثال السابق، يمكن الحصول على معادلتي F وN_2 مباشرة من المعادلة (2–2a) والمعادلة (2–2b) لأن مسألة اتِّزان الكتلة العلوية مماثلة للمسألة التي سبق حلُّها للتو في المثال ٢-٢. الأهم هو ملاحظة أن المعادلة (2–6d) في P يمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة (2–2a) إذا تعاملنا مع الكتلتين على أنهما جسم مركَّب وزنه $W_1 + W_2$. بالمثل، من المعادلة (2–2b)، تكون القوة الكلية العمودية على هذا الجسم المركب هي $N = (W_1 + W_2)\cos\theta$.

هل يجوز القول دائمًا إن القوة الكلية على جسمٍ ما في حالة اتزان تكون صفرًا، حتى لو كان الجسم نظامًا مركَّبًا من عدة أجزاء؟ بمساعدة القانون الثالث يمكننا إثبات أن الإجابة هي «نعم». إذا لم يكُن الحال كذلك، فسيكون قانون نيوتن الأول قابلًا للتطبيق فقط على أجسام «أولية» معينة (من المحتمل أن تكون ذات أبعاد ميكروسكوبية) ولن يكون قابلًا للتطبيق على أجسام مثل الكرات والكتل التي تتكوَّن بالفعل من جزيئات عديدة.

باختصار، يسمح لنا القانون الثالث أن ننحي جانبًا السؤال الحساس عن ماهية «الجسيمات» التي تتبع قوانين نيوتن للحركة. إذا كانت الأجسام الصغيرة بدرجة كافية تتبع قانون نيوتن الأول، فإن القانون الثالث يقضي ضمنًا بأن تتبع الأجسام الأكبر هي الأخرى قانون نيوتن الأول (يسمح القانون الثالث أيضًا بأن نُطبق القانون الثاني على أجسام كبيرة «مركبة» كما سنرى بعد قليل).

نُعرِّف النظام بأنه أيُّ تجميعة من الجسيمات (الجسيم هو جسم صغير بدرجة تكفي لأن يتبع قوانين نيوتن). تُرَقَّم الجسيمات بالدليل $i = 1, 2, \ldots, N$. ونقول إن النظام في حالة اتزان عندما يكون كل جسيم من جسيمات النظام في حالة اتزان (أي ساكنًا أو متحركًا بسرعة ثابتة).

إذا كانت $\vec{F}_i$ هي القوة الكلية المؤثرة على الجسيم رقم i؛ فإن حالة الاتزان $\vec{F}_i = 0$ تكون لكل i، وبالتالي:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0. \tag{2–7}$$

يمكننا كتابة $\vec{F}_i$ كمجموع حدين:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,\text{ext}} + \sum_{j=1//j\neq i}^{N} \vec{f}_{ji}, \tag{2-8}$$

حيث $\vec{F}_{i,\text{ext}}$ هي القوة «الخارجية» المؤثرة على الجسيم رقم i (أي القوة المؤثرة على الجسيم رقم i بواسطة جسيمات لا يشملها النظام) و$\vec{f}_{ji}$ هي القوة المؤثرة بواسطة الجسيم رقم j على الجسيم رقم i. (نفترض أن أي جسيم لا يمكنه التأثير بأي قوة على نفسه. وهذا تحديدًا نابع من قانون نيوتن الثالث الذي ينص على أن الفعل ورد الفعل سيكونان متماثلين في حالة القوة الذاتية.) وبهذا فإن المعادلة $\sum_i \vec{F}_i = 0$ تصبح:

$$\sum_i \vec{F}_{i,\text{ext}} + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ji} = 0. \tag{2-9}$$

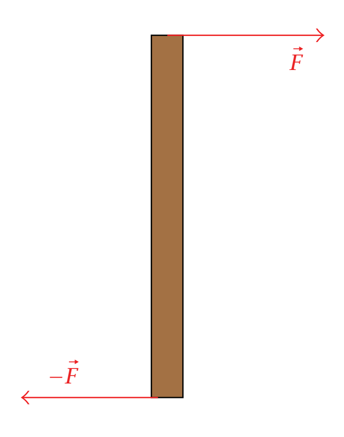
لكنَّ كلًّا من حدود الجمع المزدوج تُلاشي بعضها في ثنائيات؛ فمثلًا، الجمع الذي يحتوي على $\vec{f}_{21}$ و$\vec{f}_{12}$، هو ثنائي فعل ورد فعل، ومن ثم يكون مجموعه المتجهي صفرًا. وبذلك يتلاشى الجمع المزدوج (أي إن القوة الداخلية الكلية تتلاشى. يمكن تلخيص هذا عادة بجملة أنه «لا يمكنك رفع نفسك بواسطة رباط حذائك»)، ويكون لدينا:

$$\sum_i \vec{F}_{i,\text{ext}} = 0. \tag{2-10}$$

وبذلك، إذا كان نظام جسيمات ما في حالة اتزان فإن القوة الخارجية الكلية على النظام يجب أن تتلاشى.

تسمح لنا النظرية السابقة بتطبيق قانون نيوتن الأول على أيٍّ من الكتلتين في مثال ٢–٥، أو على النظام المركب المتكوِّن من كلتا الكتلتين. لنا بالطبع مطلق الحرية في اختيار أي مجموعة مناسبة من الجسيمات لتكون «النظام» المَعْنِيَّ بالدراسة. سوف نرى في أمثلة لاحقة أنه كثيرًا ما يمكن استغلال هذه الحرية لتبسيط حل المسألة.

أثبتنا أنه إذا كان نظام ما في حالة اتزان، يجب أن تتلاشى القوة الكلية الخارجية المؤثرة على النظام. لكننا لم نُثبت أنه إذا تلاشت القوة الكلية المؤثرة على نظامٍ ما، فإن النظام يكون في حالة اتِّزان (مع علم أن $\sum \vec{F}_i = 0$، لا يمكننا استنتاج أن $\vec{F}_i = 0$ لكل i). وبرغم تلاشي القوة الكلية الخارجية المؤثرة على نظام ما؛ فإن النظام قد لا



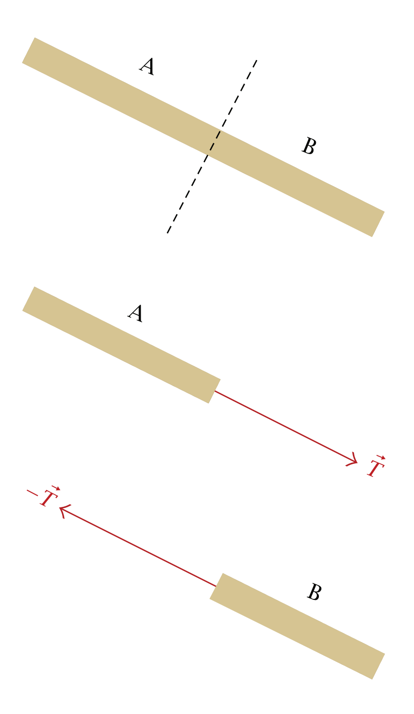
شكل ٢-٨: يتضح هنا أنه برغم عدم وجود محصلة قوة على نظام ما؛ فإن النظام قد لا يكون في حالة اتِّزان. في هذه الحالة تؤثر قوتان متساويتان ومتضادتان على طرفي القضيب.

يزال في حالة اتزان. أحد الأمثلة البسيطة (شكل ٢-٨) حالة قضيب تؤثر عليه قوة $\vec{F}$ (عمودية على القضيب) عند أحد الطرفين وقوة $-\vec{F}$ عند الطرف الآخر. من الواضح أن القضيب سيبدأ في الدوران برغم تلاشي القوة الكلية الخارجية. أُرجِئَت مناقشة «الشروط الضرورية والكافية» لاتزان الأجسام الجاسئة إلى الفصل الثامن.

(٦) الحبال والأوتار: معنى «الشد»

يتكون العديد من النبائط البسيطة والمهمة (مثلًا، نظام لكتلة وأوتار وبكرة) من عدة أجزاء متصلة بأوتار أو حبال. قبل تحليل مثل هذه النبائط، علينا فَهم المقصود بالوتر وماذا يعني الشد فيه. لأغراض مفاهيمية دعنا نقسم الوتر إلى جزءين: A وB، بواسطة مستوى تخيلي عمودي على الوتر عند نقطة اختيارية ما (نؤكد على أن المستوى ما هو إلا بناء رياضياتي لا يُتلف الوتر!) يؤثِّر الجزء B بقوة $\vec{T}$ على A (شكل ٢-٩)، ومن القانون الثالث يؤثر A بقوة $-\vec{T}$ على B.

يجب أن يكون $\vec{T}$ موازيًا (مماسيًّا) للوتر ويجب أن يشير في الاتجاه من A إلى B. تُميز هاتان الخاصيتان الوتر عن القضيب. يمكن لجزء من القضيب أن يؤثر بقوة عرضية (تسمى قوة قص) على الجزء المجاور، بالإضافة إلى قوة موازية للقضيب. في حالة القضيب، يمكن للقوة الموازية المؤثرة بواسطة B على A أن تُشير في الاتجاه من A



شكل ٢-٩: مفاهيميًّا، نقسم الوتر إلى قطعتين بواسطة مستوًى تخيلي. يؤثر B بقوة $\vec{T}$ على A ويؤثر A بقوة $-\vec{T}$ على B. المقدار المشتَرَك لهاتين القوتين يُسَمَّى الشد في هذه النقطة من الوتر.

إلى B (ونقول في هذه الحالة إن B تسحب A) أو من B إلى A (ونقول في هذه الحالة إن B تدفع A). لا يمكن لجزء من وتر ما أن يؤثر بقوة عرضية على الجزء المجاور ويمكنه فقط سحب (وليس دفع) الجزء المجاور.

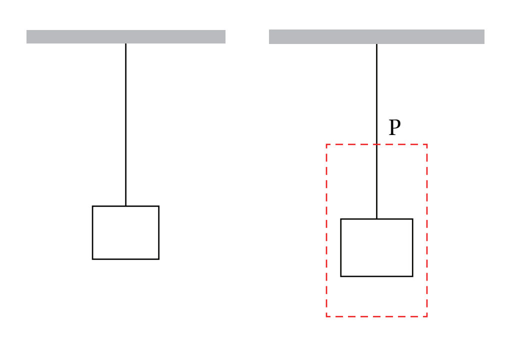
يسمى مقدار $\vec{T}$ (المساوي، بالطبع، لمقدار $-\vec{T}$) بالشد في الوتر عند النقطة محل الدراسة. سوف نرى أنه في ظل ظروف معينة يكون الشد كما هو عند جميع النقاط في وترٍ ما. رغم ذلك، ليس هذا هو الحال دائمًا (انظر مثال ٢-٦). أحد الأسئلة التي تُطرح كثيرًا، لكن ليس له بالفعل معنًى دقيق، هو «في أي اتجاه يؤثِّر الشد؟» فالشد هو المقدار المشترك لقوتين؛ تؤثر إحداهما على A وتتجه من A إلى B، وتؤثر القوة الأخرى على B وتتجه من B إلى A.

مثال ٢–٦ (شد في وتر بواسطة ثقل). هَب أن لدينا كتلة وزنها W معلَّقة من السقف بواسطة وتر رأسي وزنه لكل وحدة طول هو w (انظر شكل ٢-١٠). نرغب في إيجاد الشد عند نقطة P على مسافة x من الطرف السفلي للوتر. نُعَرِّف «النظام» محل الدراسة بأنه الكتلة بالإضافة إلى جزء الوتر أسفل P. هناك قوتان خارجيتان تؤثران على النظام: تؤثر الكرة الأرضية بقوة جاذبية لأسفل مقدارها $W + wx$ ويؤثر جزء الوتر فوق P بقوة لأعلى مقدارها هو الشد T عند نقطة P. وبما أنه يجب أن تكون القوة الكلية الخارجية صفرًا، نجد أن $T = W + wx$. وبذلك لا يكون الشد هو ذاته عند جميع نقاط الوتر وتكون قيمته العظمى عند أعلى نقطة في الوتر. إذا كان الوتر بلا وزن ($w = 0$)، فإن الشد يكون كما هو عند جميع نقط الوتر.

وبوجه أعم، حتى لو كان الوتر يمر على بكرات، يمكننا أن نُبين أن الشد يكون كما هو عند جميع نقاط الوتر بشرط أن يكون الوتر بلا وزن، وبشرط أن يكون سطح التماس بين الوتر والبكرة أملس. تكون هذه الجملة صحيحة حتى في حالات عدم الاتزان، ولكننا الآن سنبرهن عليها فقط عندما يكون الوتر في حالة اتِّزان. اعتبر قطعة قصيرة جدًّا من الوتر. يؤثر باقي الوتر بقوى على طرفيه. بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت القطعة متماسة مع سطح أملس، فإن السطح قد يؤثر بقوة عمودية على القطعة. وإذا كان الوتر بلا وزن، فلن تكون هناك قوة جاذبية مؤثرة على القطعة. وإذا كانت القطعة في حالة اتزان، يجب أن تتلاشى القوة الكلية المؤثرة عليها. وبصورة خاصة، يجب أن تتلاشى محصلة جميع القوى المؤثرة على طول الاتجاه الموازي للقطعة. وهذا يقتضي ضمنًا أن تكون قوتَا الشد عند الطرفين متساويتين. ينتج من ذلك أن الشد متماثل عند جميع نقط الوتر.

سوف يُفترض من الآن فصاعدًا (إلا إذا ذُكر غير ذلك)، في المثال القادم وجميع الأمثلة التالية التي تتعلق بالحبال والبكرات أو إحداهما، أن وزن الحبال يمكن إهمالُه وأن البكرات ملساء؛ وبناءً على ذلك يكون الشد متماثلًا عند جميع نقط الحبل. وسوف يُفتَرَض أيضًا أن البكرات بدون وزن ما لم يُنص على غير ذلك.

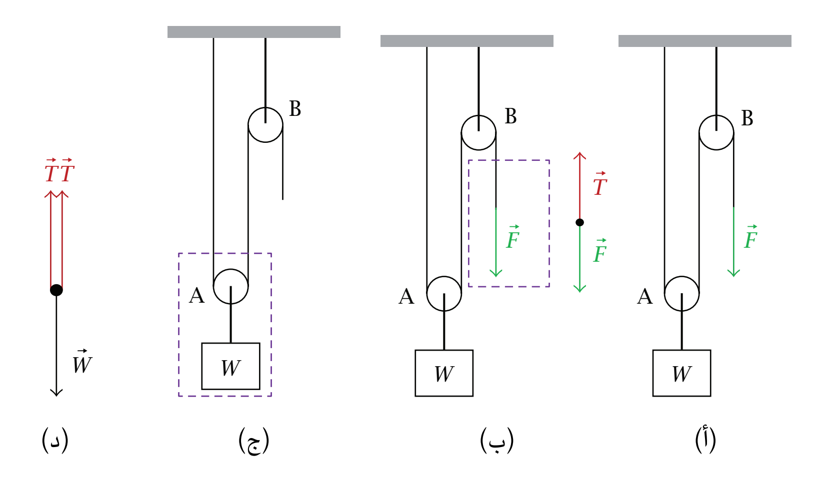
مثال ٢–٧ (تحليل نظام بكرات بسيط). يبين شكل ٢-١١(أ) نظام بكرات بسيطًا. لاحظ أن البكرة B مُثبتة في الفضاء، بينما تتحرك البكرة A لأعلى ولأسفل مع الوزن W. السؤال البدهي هو: ما القوة التي يجب أن تؤثر على نهاية الحبل لكي تحافظ على الاتزان؟



شكل ٢-١٠: كتلة وزنها W معلَّقة بواسطة وتر وزنه w لكل وحدة طول. لإيجاد الشد عند نقطة P سيكون من المفيد تعريف النظام المعني بأنه كل شيء أسفل P.

أولًا، علينا أن نعترف بأن الشد في الحبل يساوي F. لإثبات ذلك، نتخذ قطعة الحبل المحتواة داخل الصندوق المتقطع في شكل ٢-١١(ب) لتكون نظامنا المعني بالدراسة. القوتان الخارجيتان الوحيدتان اللتان تؤثران على هذا النظام هما القوة F لأسفلَ وقوة لأعلى مقدارها T تؤثر بواسطة باقي الحبل على نهاية الطرف العلوي للقطعة. وبما أنه يجب للقوة الكلية المؤثرة على القطعة أن تتلاشى، نجد أن $T = F$.

لحساب F نُعَرِّف نظامنا بأنه محتويات الصندوق المتقطع في شكل ٢-١١(ج). القوى الخارجية الوحيدة المؤثرة على هذا النظام (انظر شكل ٢-١١(د)) هي قوة سحب الجاذبية لأسفل على الكتلة (يُفترض هنا أن البكرتين بدون وزن) والقوى المؤثرة على قطعة الحبل التي على شكل حرف U لأعلى بواسطة باقي الحبل. شرط الاتزان هو $2T - W = 0$. وبما أن $T = F$، نجد أن $F = W/2$. وبذلك يمكن لقوة مؤثرة على نهاية طرف الحبل مقدارها ٥٠ رطلًا أن تُبقي على كتلة وزنها ١٠٠ رطل في حالة اتزان. يمكن تلخيص هذه الحقيقة في القول بأن نظام البكرات يضاعف الفائدة الميكانيكية. لاحظ أنه إذا استُخدِم نظام البكرات لرفع الوزن W، فإنه يجب أن تُشَد نهاية طرف الحبل الحر لأسفل لمسافة تساوي ضعف المسافة التي ارتفعها W. يسمح لك نظام البكرات بإنجاز المهمة باستخدام قوة أقل، لكن عليك أن تؤثر بهذه القوة لمسافة أطول. يوضح لنا هذا مبدأً أعم بكثير جدًّا يسمى «حفظ الطاقة»، وهو التعبير الفيزيائي لمقولة: «لا يمكنك الحصول على شيء بدون مقابل.»

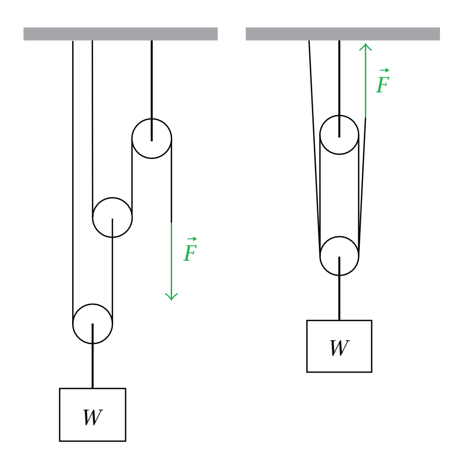


شكل ٢-١١: (أ) نظام بكرات بسيط في المثال ٢-٧. (ب) يبين اعتبار مخطط الجسم الحر للنظام المحاط بالصندوق المتقطع أن الشد في الحبل يكون مساويًا للقوة $\vec{F}$ المؤثرة عند الطرف. (ج) من المفيد لحساب F أن نُعَرِّف نظامنا بأنه محتويات الصندوق المتقطع. (د) مخطط الجسم الحر للنظام المعرف في شكل ٢-١١(ج).

يمكننا تصميم أنظمة بكرات ذات فائدة ميكانيكية اختيارية كبيرة باستخدام ترتيبات مناسبة من الحبال والبكرات (انظر شكل ٢-١٢).

مثال ٢-٨ (تحليل نظام بكرات الشراع). يصور شكل ٢-١٣(أ) عاملة دهان (وزنها ١٦٠ رطلًا أو ٧١٢ نيوتن (n)) تقف على سقالة (وزنها ٢٠٠ رطل أو ٨٩٠ نيوتن). ما القوة $\vec{F}$ التي ينبغي لعاملة الدهان أن تسحب بها الحبل للحفاظ على الاتِّزان؟ لاحظ أن عاملة الدهان والسقالة في حالة اتِّزان ليس فقط أثناء السكون، ولكنهما كذلك أيضًا أثناء ارتفاعهما وانخفاضهما بسرعة ثابتة.

لقد رأينا بالفعل أن الشد T يجب أن يكون متماثلًا عند جميع نقاط الحبل عديم الوزن ويجب أن يساوي F. وأسهل طريقة لحساب $T_A = T_B = T_C = T$ هي اعتبار النظام المحتوى داخل الصندوق المتقطع في شكل ٢-١٣(ب). ومن أجل ضبط الحسابات، سنضع متجه وحدة $\hat{k}$ يشير رأسيًّا لأعلى. يؤثر جزء الحبل خارج الصندوق المرسوم بخط متقطع بقوة $\vec{T}_A + \vec{T}_B + \vec{T}_C = 3T\hat{k}$؛ وذلك لأن الجزء الخارجي يؤثر



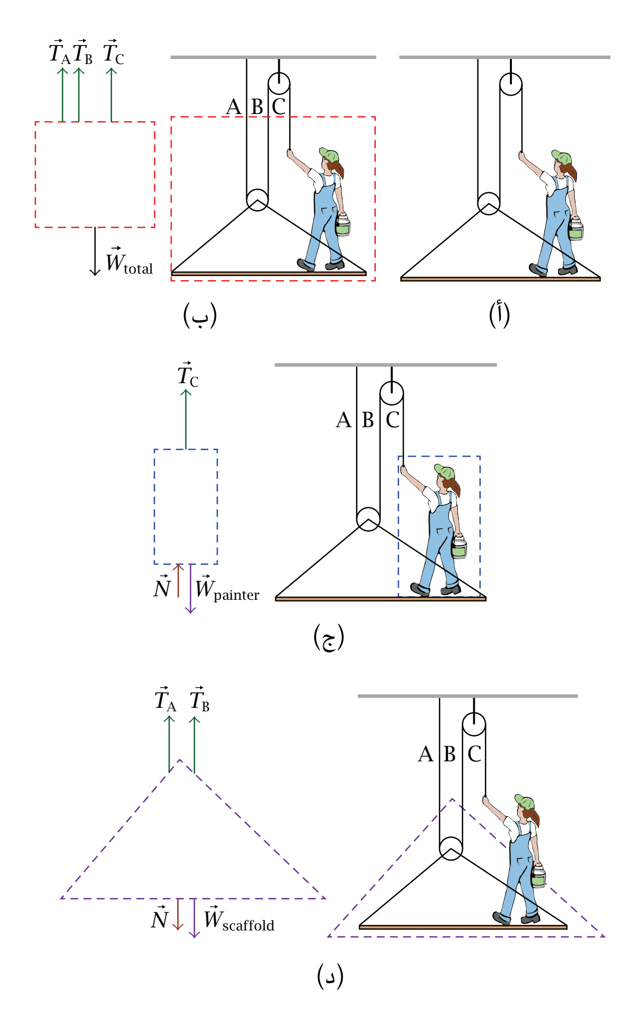
شكل ٢-١٢: كلٌّ من هذين الترتيبين للبكرات يوفر أربعة أضعاف الفائدة الميكانيكية.

لأعلى بقوة $T\hat{k}$ على الجزء الداخلي عند كلٍّ من النقاط الثلاث A، B، C. قوة الجاذبية على السيدة والسقالة هي $(-1602\,\mathrm{N})\,\hat{k}$. وبهذا يكون شرط الاتِّزان هو:

$$3T\hat{k} - (1602\,\mathrm{N}) = 0 \Longrightarrow T = 534\,\mathrm{N}. \qquad (2\text{–}11)$$

يقدر هذا بحوالي ١٢٠ رطلًا. وبما أن $T = F$ فإنه ينبغي لعاملة الدهان أن تسحب بقوة ١٢٠ رطلًا.

من المثير للاهتمام أن نسأل عن مقدار القوة التي تؤثِّر بها السقالة على قَدَمَيْ عاملة الدهان. دعنا نُسمِّ هذه القوة $N\hat{k}$. يمكننا حساب N عن طريق تعريف نظامنا بأنه عاملة الدهان فقط أو السقالة فقط (لكن نظام عاملة الدهان مع السقالة لن يَفِي بالغرض لأن القوة المؤثِّرة بواسطة السقالة على عاملة الدهان قوة داخلية في هذا النظام؛ ومن ثم لن تظهر في معادلة الاتزان). القوى المؤثرة على عاملة الدهان (شكل ٢-١٣(ج)) هي قوة $F\hat{k}$ مؤثرة بواسطة الحبل على أيدي عاملة الدهان، وقوة $N\hat{k}$ مؤثرة بواسطة السقالة على قدميها، وقوة $(-712\,\mathrm{n})\hat{k}$ مؤثرة بواسطة الجاذبية. ولأن عاملة الدهان في حالة اتزان، فإن $F\hat{k} + N\hat{k} - (712\,\mathrm{n})\hat{k} = 0$. وبما أننا نعلم بالفعل أن $F = 534\,\mathrm{n}$، نجد أن $N = 178\,\mathrm{n}$ أو حوالي ٤٠ رطلًا.



شكل ٢-١٣: (أ) رسم توضيحي لمثال ٢-٨. (ب) من المفيد لحساب الشد في الحبل، اعتبار النظام المحاط بالصندوق المتقطع. (ج) مخطط الجسم الحر لعاملة الدهان. (د) يمكننا هذا من حساب القوة التي تؤثر بها السقالة على قدمي عاملة الدهان. يمكننا أيضًا حساب القوة المؤثرة على السقالة بواسطة قدمي عاملة الدهان عن طريق اعتبار مخطط الجسم الحر هذا.

إذا كان الكون متسقًا رياضيًّا، فينبغي أن نكون قادرين على الحصول على نفس النتيجة باعتبار اتِّزان السقالة (نُعَرِّف نظامنا على وجه الدقة بأنه السقالة مع قطعة

من الحبل على شكل حرف U كما في شكل ٢-١٣(د)). محصلة القوى على هذا النظام هي $2T\hat{k}$ المؤثرة بواسطة باقي الحبل، و$(-890\,\text{n})\hat{k}$ المؤثرة بواسطة الجاذبية، و$-N\hat{k}$ المؤثرة بواسطة قدمي عاملة الدهان. وبذلك يكون لدينا $2T\hat{k} - (890\,\text{n})\hat{k} - N\hat{k} = 0$ وهو ما يؤدي إلى أن تكون $N = 2T - 890\,\text{n} = 178\,\text{n}$. وهذا يساوي حوالي ٤٠ رطلًا.

إذا كانت السقالة ثقيلة للغاية؛ فإن عاملة الدهان سترتفع من عليها ولن تتمكن من الحفاظ على الاتِّزان. افترض أن وزن عاملة الدهان هو W_{painter} وأن وزن السقالة هو W_{scaffold}. بتطبيق قانون نيوتن الأول على النظام المكوَّن من عاملة الدهان والسقالة، نحصل على $3T\hat{k} - (W_{\text{painter}} + W_{\text{scaffold}})\,\hat{k} = 0$، أو $T = (W_{\text{painter}} + W_{\text{scaffold}})/3$. بتطبيق القانون الأول على عاملة الدهان فقط نجد $F\hat{k} + N\hat{k} - W_{\text{painter}}\hat{k} = 0$ أو $N = W_{\text{painter}} - F$. ولأننا نعلم أن $F = T$، نجد أن $N = (2W_{\text{painter}} - W_{\text{scaffold}})/3$. القوة التي تؤثر على قدمي عاملة الدهان مُعَرَّفة بأنها $N\hat{k}$. وطالما N موجبة، فإن الأرضية تدفع بقدمي عاملة الدهان إلى أعلى. وتدل قِيَم N السالبة على أن الأرضية لا بُدَّ أنها تسحب قدمَيْ عاملة الدهان لأسفل، وهذا ليس ممكنًا إلا إذا كانت قدماها مثبتتين بالأرضية. من الواضح أنه يمكن إيجاد قيمة W_{scaffold} الحَرِجة (التي لا يكون بعدها الاتزان ممكنًا إلا إذا كانت قَدَمَا عاملة الدهان مثبتتين لأسفل) بوضع $N = 0$. وهذا يعطي $W_{\text{scaffold}} = 2W_{\text{painter}}$. إذا كانت عاملة الدهان تَزِنُ ١٦٠ رطلًا، فإنها «سترتفع عن الأرضية» إذا كانت السقالة تزن أكثر من ٣٢٠ رطلًا.

(٧) الاحتكاك

عندما يكون سطحا جسمين متماسَّيْن؛ فإنه كثيرًا ما تكون هذه هي الحالة التي لا يكون فيها للقوة التي يؤثر بها أحد الجسمين على الآخر مركبة عمودية على السطح فقط، ولكن لها أيضًا مركبة موازية للسطح. هذه الأخيرة تُسمى قوة الاحتكاك، وهي تلعب دورًا رئيسيًّا في العديد من الظواهر المألوفة. فمثلًا، لا يمكن قيادة سيارة أعلى تل، أو حتى إيقافها على تل، إذا لم يكُن الاحتكاك موجودًا. لا يمكن للسيارة كذلك أن تجتاز ملفًّا ما. في غياب الاحتكاك، سينزلق راكب ما يقِف في عربة سكة حديد نحو الجزء الخلفي من العربة عندما يتسارع القطار. لقد اعتدنا اعتقاد أن الاحتكاك هو شيء غير مرغوب (ونقوم بإنفاق قدر كبير من المال على عمليات التشحيم لتقليل قوة

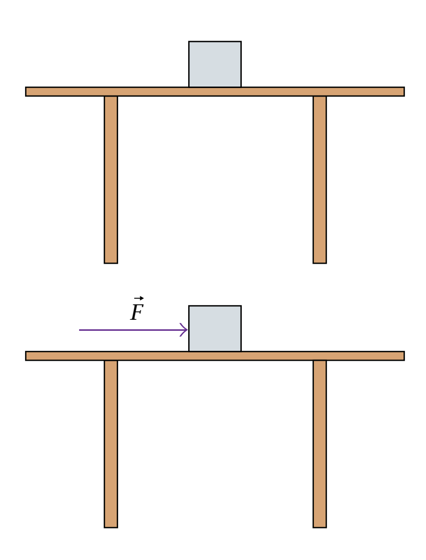
الاحتكاك التي تكون موجودة عندما ينزلق سطحٌ ما على آخر)، لكن الأمثلة السابقة توضح أن الاحتكاك كثيرًا ما يكون أمرًا مرغوبًا وأساسيًّا.

ما من داعٍ للتشديد على أن صحة قوانين نيوتن لا تتطلَّب الافتراض غير الواقعي المتمثل في وجود عالم خالٍ من الاحتكاك. تَصِفُ قوانين نيوتن العالم الواقعي بقواه الواقعية. صحيح أننا نفترض في بعض المسائل عدم وجود احتكاك، لكن هذا ليس ضروريًّا من الناحية المفاهيمية. لم يُدرِك معظم أسلاف نيوتن أن الحفاظ على جسم ما متحركًا بسرعة ثابتة لا يتطلب أي قوة؛ فقد لاحظوا أنه لجعل جسم ما يستمر في الحركة على منضدة أفقية، يجب عليهم دفعه. لا يعني هذا ضمنًا أن قانون نيوتن الأول خاطئ؛ فالدفع الضروري يكون ببساطة مساويًا ومضادًّا لقوة الاحتكاك المؤثرة بواسطة المنضدة. واليوم، مع المسارات الهوائية والمناضد الهوائية التي تجعل بالفعل قرصًا أو ناقلة معلقة فوق سطح ما بواسطة وسادة رفيعة من الهواء، يمكننا الاقتراب جدًّا من تحقيق حالة سطح بدون احتكاك تجريبيًّا. لا يعتقد أي شخص قام بتجربة المسار الهوائي أو المنضدة الهوائية أن من الضروري وجود قوة للإبقاء على جسم ما متحركًا.

إن الأصل الميكروسكوبي لقوى الاحتكاك لم يُفهم بعدُ على نحوٍ كامل، كما أن هذا الفهم ليس ضروريًّا لأغراضنا. في بعض الحالات يمكن حساب مقدار قوى الاحتكاك بدون حتى معرفة أي شيء عن طبيعة الأسطح. في حالات أخرى يكون من الضروري معرفة المزيد عن الأسطح (أي تركيبها ودرجة ملاستها). إن اعتبار بضعة أمثلة بسيطة ربما يكون أكثر تنويرًا من المناقشة النظرية المجردة لهذا الموضوع.

مثال ٢–٩ (كتلة على منضدة مع احتكاك). اعتبر كتلة ساكنة على منضدة أفقية (شكل ٢-١٤). القوتان الوحيدتان اللتان تؤثران على الكتلة هما قوة الجاذبية $\vec{W}$ (متجهة إلى أسفل) والقوة العمودية $\vec{N}$ (متجهة إلى أعلى) المؤثرة بواسطة المنضدة. يتطلب قانون نيوتن الأول أن يكون $\vec{N} + \vec{W} = 0$. والآن افترض أن قوةً ما أفقية $\vec{F}$ أثرت على الكتلة. نعلم من خبرتنا أن الكتلة ستظل ساكنة على منضدة واقعية (أي منضدة ليست ملساء تمامًا) إذا كان مقدار $\vec{F}$ ليس كبيرًا جدًّا.

قانون نيوتن الأول يتطلب حتمية وجود قوة أفقية أخرى، مساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه لـ $\vec{F}$، تؤثر على الكتلة. هذه القوة، التي تؤثر بواسطة سطح المنضدة

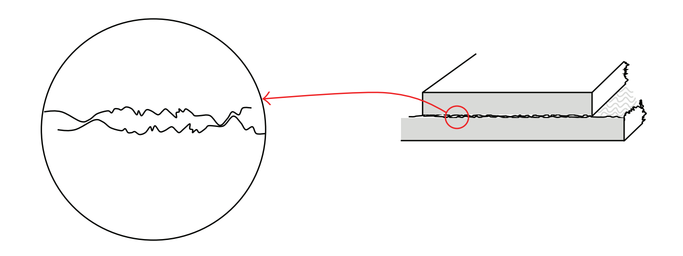


شكل ٢-١٤: توضيح لمثال ٢-٩.

على السطح السفلي للكتلة، تسمى قوة الاحتكاك ويرمز لها بالرمز $\vec{f}$. ينص قانون نيوتن الأول على أن $\vec{F} + \vec{f} = 0$. (النص الكامل للقانون الأول في هذه الحالة هو $\vec{N} + \vec{W} + \vec{F} + \vec{f} = 0$ لكن بما أن $\vec{N}$ و$\vec{W}$ قوتان رأسيتان و$\vec{F}$ و$\vec{f}$ أفقيتان، فينتج من ذلك أن $\vec{N} + \vec{W} = 0$ و$\vec{F} + \vec{f} = 0$.) ولتبسيط التصور، يمكن للمرء أن يتخيَّل أن سطحَي كلٍّ من المنضدة والكتلة بهما خشونة صغيرة (قمم ومنخفضات)، بحيث يتشابَك السطحان إلى حَدٍّ ما، مثل مجموعة من أسنان التروس (شكل ٢-١٥). إن قوة الاحتكاك هي ببساطة القوة الأفقية التي تؤثر بواسطة خشونة المنضدة على خشونة الكتلة.

طالما أن الكتلة في مثال ٢-٩ ساكنة؛ فإن المقدار f لقوة الاحتكاك يساوي ببساطة المقدار F للقوة المؤثِّرة. لقد حسبنا f في هذه الحالة دون معرفة أي شيء عن طبيعة السطحين.

السؤال البدهي هو: ما القدر الذي ينبغي أن تؤثر به قوة F لجعل الكتلة تنزلق؟ بالطبع تعتمد الإجابة على الموادِّ المصنوعة منها الكتلة والمنضدة، وأيضًا على درجة نعومة السطحين. وحتى إذا كُنَّا نعلم تركيب ودرجة نعومة كلٍّ من السطحين، فإنه من



شكل ٢-١٥: تمثيل تخطيطي لمنشأ الاحتكاك الاستاتيكي. في الواقع، خشونة السطحين أصغر بكثير مما هو مبين هنا، لكنها موجودة حتى للأسطح ناعمة الملمس.

المستحيل عمليًّا الإجابة على هذا السؤال من المبادئ الأولى؛ لأنه يتطلب فهمًا تفصيليًّا للتآثرات المختلفة على المقياس الميكروسكوبي (الجزيئي). لحسن الحظ، يمكن الإجابة على السؤال تجريبيًّا ويمكن تلخيص كَمِّيَّة هائلة من البيانات بواسطة «قانون» بسيط جدًّا. نؤكد على أن هذا القانون ليس جوهريًّا (على عكس قوانين نيوتن)، لكنه يوفر ملخصًا مفيدًا للبيانات التجريبية.

على وجه العموم، عندما يكون سطحَا جسمين متماسين؛ فإن الجسم A يؤثر بقوة عمودية $\vec{N}$ (متعامدة مع السطح) وقوة احتكاك $\vec{f}$ (موازية للسطح) على الجسم B، ويتطلب قانون نيوتن الثالث أن يؤثر B بقوتين $-\vec{N}$ و$-\vec{f}$ على A. نرمز لمقدار $\vec{N}$ (و$-\vec{N}$) بالرمز N ومقدار $\vec{f}$ (و$-\vec{f}$) بالرمز f. في مثال ٢-٩، N تساوي وزن الكتلة W وf تساوي المقدار F للقوة المؤثرة. يمكن تغيير N عن طريق وضع أوزان إضافية فوق الكتلة. يمكننا قياس F_{max} لكلٍّ من قيم N، وهي أكبر قيمة لـ F يمكن تطبيقها دون أن تتسبب في انزلاق الكتلة. وُجد أن النسبة F_{max}/N تظل ثابتة مع تغير N. تُسمى هذه النسبة معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين السطحين ويرمز لها بالرمز μ_s.

يعتمد مُعامل الاحتكاك الاستاتيكي على تركيب ونعومة السطحين، لكنه لا يعتمد على مساحة التماس؛ ولذلك، إذا استبدل بالكتلة أخرى من المادة نفسها وبدرجة النعومة نفسها لكن لها ضعف مساحة السطح السفلي، فإننا سنجد أن النسبة F_{max}/N كما هي، مثل الكتلة الأصلية. (يمكن استنتاج حقيقة أن F_{max}/N لا تتغير مع تغير مساحة التماس A من حقيقة أن F_{max}/N لا تعتمد على N عند ثبوت A. تُرك البرهان كتحدٍّ للقارئ المهتم.) وبما أن $F = f$ طالما أن الكتلة لا تنزلق، فينتج من ذلك أن

$F_{max} = f_{max}$؛ حيث f_{max} هي أعلى قيمة لقوة الاحتكاك التي يمكن لسطح ما أن يؤثر بها على الآخر (بالنسبة لقيمة معينة من القوة العادية).

وبهذا نصل إلى نص «القانون» التجريبي للاحتكاك الاستاتيكي: عندما يوجد سطحان متماسان دون أن يتحرك أحدهما على الآخر (أي دون انزلاق)، فإن القيمة العظمى لقوة الاحتكاك التي يمكن أن يؤثر بها أحد السطحين على الآخر تتناسب طرديًّا مع القوة العمودية، ويعتمد معامل التناسب μ_s فقط على تركيب ونعومة السطحين؛ أي:

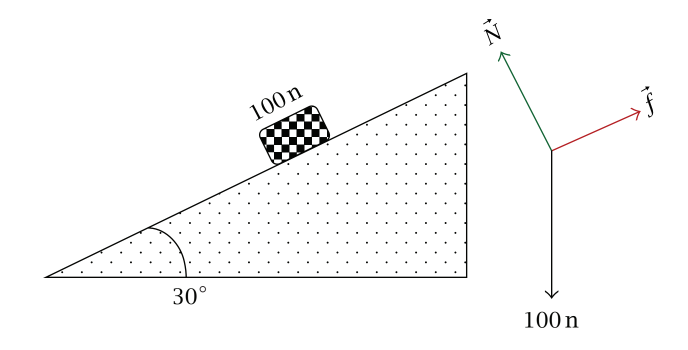
$$\frac{f}{N} \le \mu_s. \tag{2-12}$$

نؤكد على أن المعادلة (2-12) «متباينة رياضياتية». يتحقق التساوي فقط عندما يوشك الانزلاق على الحدوث. يقع الكثير من الطلبة في عادة استبدال $\mu_s N$ بـ f تلقائيًّا مما يؤدي إلى نتائج كارثية. فمثلًا، إذا لم يكن هناك قوة أفقية $\vec{F}$ مؤثرة على الكتلة في مثال ٢–٩، فلن يكون هناك قوة احتكاك وستكون النسبة f/N صفرًا حتى لو لم يكن μ_s صفرًا.

مثال ٢–١٠ (كتلة على منحدر مع احتكاك). كتلة وزنها ١٠٠ نيوتن (n) مستقرة في حالة اتزان على مستوى مائل بزاوية $30°$. ومعامل الاحتكاك الاستاتيكي بين المستوى والكتلة هو $\mu_s = 0.6$. نرغب في حساب قوة الاحتكاك والقوة العمودية المؤثرة على الكتلة بواسطة المستوى.

مخطط الجسم الحر للكتلة مبين في شكل ٢-١٦. وبأخذ مركبتين لمعادلة القوة على طول المحورين الموازي والعمودي على المستوى، نحصل على $f - (100\,\mathrm{n}) \sin 30° = 0$ و$N - (100\,\mathrm{n}) \cos 30° = 0$. وبهذا يكون $f = 50\,\mathrm{n}$ و$N = 86.6\,\mathrm{n}$.

لاحظ أننا لم نستخدم قيمة μ_s المعطاة. تدخل قيمة μ_s في المناقشة فقط إذا سألنا: «هل يمكن فعلًا للكتلة أن تكون في حالة اتزان على المستوى؟» باختبار النسبة f/N، نجد أن $f/N = \tan 30° = 0.577$؛ ولذلك نجد من المعادلة (2-12) أن الاتزان ممكن؛ لأن $0.6 > 0.577$. بشكل أعم، إذا كانت كتلة ما وزنها W في حالة اتزان على مستوى مائل يصنع زاوية θ مع الأفقي، فإن قوة الاحتكاك هي $f = W \sin\theta$ والقوة العمودية هي $N = W \cos\theta$. وهكذا نجد أن $f/n = \tan\theta$ وبذلك يكون الاتزان الاستاتيكي ممكنًا فقط إذا كان $\tan\theta \le \mu_s$.

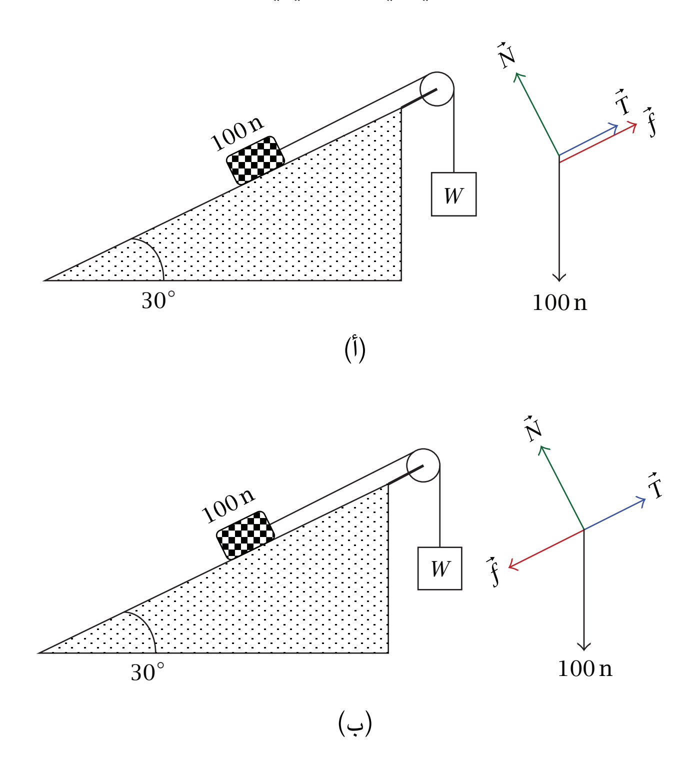


شكل ٢-١٦: الرسم التوضيحي ومخطط الجسم الحر لمثال ٢-١٠.

في المثال السابق، أقصى زاوية يكون عندها الاتزان الاستاتيكي ممكنًا هي $\theta_{\max} = \tan^{-1}(0.6) = 31°$. (لقد افترضنا ضمنًا أنه بزيادة θ نصل إلى أن الكتلة تبدأ في الانزلاق لأسفل المستوى. من المحتمل أيضًا أن تنقلب الكتلة قبل أن تبدأ في الانزلاق. أُرجئ تحليل هذا الاحتمال إلى الفصل السابع الذي يناقش «الشروط الضرورية والكافية» لاتزان الأجسام الجاسئة. نعلم من خبرتنا أنه إذا كان عرض الكتلة (وهو البعد الموازي للمستوى) كبيرًا بدرجة كافية، مقارنة بالارتفاع (وهو البعد العمودي على المستوى)؛ فإن الانزلاق سوف يحدث قبل الانقلاب.)

مثال ٢-١١ (كتلة متصلة بثقل على منحدر مع وجود احتكاك). يرتكز صندوق وزنه ١٠٠ نيوتن (n) على مستوًى مائل بزاوية $30°$. معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين الصندوق والمستوى هو $\mu_s = 0.4$. وتم وصل وزن W بالصندوق بواسطة وتر يمر على بكرة ملساء (شكل ٢-١٧(أ)). أوجد القيمتين العظمى والصغرى لـ W التي يكون عندهما الاتزان الاستاتيكي ممكنًا.

لاحظ أنه إذا كان $W = 0$ فإن الاتزان لن يكون ممكنًا لأن $\tan 30° > 0.4$، وبذلك ستنزلق الكتلة لأسفل المستوى. وعندما يكون $W = W_{\min}$ (أقل قيمة ضرورية للاتزان) ستكون قوة الاحتكاك f المؤثرة على الكتلة بواسطة المستوى متجهة إلى أعلى المنحدر وسيكون لها أكبر قيمة ممكنة؛ أي $f = \mu_s N = 0.4(100\,\text{n})\cos 30° = 34.6\,\text{n}$. نجد من مخطط الجسم الحر للصندوق أن $T + f - (100\,\text{n})\sin 30° = 0$؛ حيث T هي الشد في الوتر. وبهذا يكون $T = (100\,\text{n})\sin 30° - (34.6\,\text{n}) = 15.4\,\text{n}$.



شكل ٢-١٧: (أ) رسم توضيحي ومخطط الجسم الحر للكتلة عندما يكون لـ W أقل قيمة متسقة مع الاتزان. (ب) رسم توضيحي ومخطط الجسم الحر للكتلة عندما يكون لـ W أقصى قيمة متسقة مع الاتزان.

يظهر اعتبار القوى المؤثرة على الثقل المعلق أن $T = W$، ومن ثم فإن $W_{\text{min}} = 15.4\,\text{n}$.

مع زيادة W لأكثر من ١٥٫٤ نيوتن فإن الكتلة تظل في حالة اتزان وتقل قوة الاحتكاك f اللازمة. عندما يكون $W = (100\,\text{n})\sin 30^\circ = 50\,\text{n}$، فإن قوة الاحتكاك f تكون صفرًا. ومع زيادة W لأكثر من ٥٠ نيوتن، يكون اتجاه قوة الاحتكاك لأسفل المنحَدَر وتزيد f مرة أخرى. مخطط الجسم الحر للكتلة عند $W = W_{\text{max}}$ مبين في شكل ٢-١٧(ب)؛ حيث f عند أعلى قيمة ممكنة لها وهي $\mu_s N = 34.6\,\text{n}$. من مركبة

معادلة القوة الموازية للمستوى ينتج $T - f - (100\,\text{n}) \sin 30^\circ = 0$؛ ومن ثَمَّ يكون $W_{\text{max}} = T = f + (100\,\text{n}) \sin 30^\circ = 84.6\,\text{n}$.

مثال ٢-١٢ (كتلة مسحوبة على منضدة أفقية مع وجود احتكاك). كتلة وزنها ١٠٠ نيوتن ترتكز على منضدة أفقية. معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين الكتلة والمنضدة هو $\mu_s = 0.8$.

(أ) إذا قام شخص ما بسحب الكتلة بقوة F في اتجاه 37° أعلى الأفقي، فما أقل قيمة لـ F تجعل الكتلة تنزلق؟

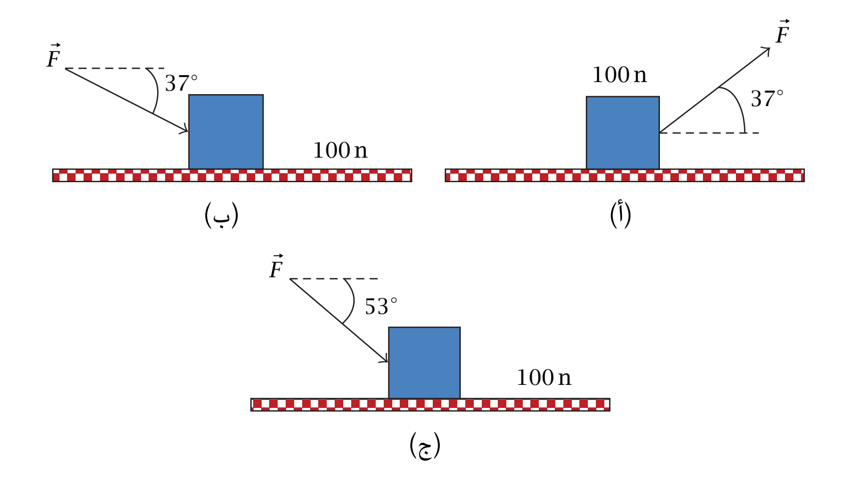
(ب) إذا قام شخص ما بدفع الكتلة بقوة F في اتجاه 37° أسفل الأفقي، فما أقل قيمة لـ F تجعل الكتلة تنزلق؟

(ج) نفس سؤال (ب)، لكن هذه المرة يكون اتجاه الدفع 53° أسفل الأفقي.

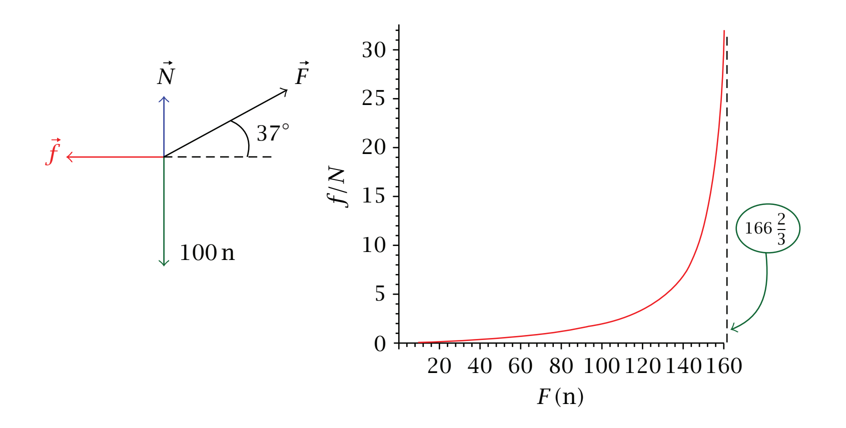
هناك بعض الجوانب الخفية قليلًا في هذه المسألة، خاصة في الجزء (ج). ومن ثَمَّ فإنها تستحق مناقشة متأنية. (لاحظ أن 37° و53° هما زاويتان مشهورتان في مسائل الفيزياء لأنهما زاويتا المثلث القائم 3–4–5؛ أي أن $\sin 37^\circ = \cos 53^\circ = 0.6$، و$\cos 37^\circ = \sin 53^\circ = 0.8$).

دعنا أولًا نعتبر الجزء (أ)، بفرض أن القوة المؤثرة $\vec{F}$ صغيرة بدرجة كافية لا تجعل الكتلة تنزلق. من مخطط الجسم الحر للكتلة (شكل ٢-١٩) نحصل على $F \cos 37^\circ - f = 0$ و$F \sin 37^\circ + N - (100\,\text{n}) = 0$؛ ومن ثَمَّ يكون $f = F \cos 37^\circ = 0.8F$ و$N = (100\,\text{n}) - F \sin 37^\circ = (100\,\text{n}) - 0.6F$. ينبغي أن نلاحظ بوضوح أن N — القوة العمودية المؤثرة على الكتلة بواسطة المنضدة — لا تساوي وزن الكتلة. يكون الاتزان ممكنًا طالما أن $f/N < 0.8$. وبرسم منحنًى بياني للنسبة f/N كدالة في مقدار القوة المؤثرة F (كما هو مبين في شكل ٢-١٩)، نرى أن f/N تزيد بزيادة F وأن f/N تئول إلى ما لانهاية مع اقتراب F من ١٦٦٫٦٧ نيوتن. وهذه هي قيمة F التي تجعل N تتلاشى. مع قيم أعلى لـ F ترتفع الكتلة عن المستوى. ولكي نجِد قيمة F التي يحدث عندها الانزلاق، نضع $f/N = 0.8$؛ ومن ثَمَّ يكون لدينا $0.8F/(100 - 0.6F) = 0.8$، وهو ما يؤدي إلى أن تكون $F = 62.5\,\text{n}$.

نقوم بتحليل الجزء (ب) بطريقة مماثلة. بفرض أن الكتلة لا تنزلق، نرسم مخطط الجسم الحر للكتلة (شكل ٢-٢٠). تُسفِر المركبتان الرأسية والأفقية لمعادلة القوة عن

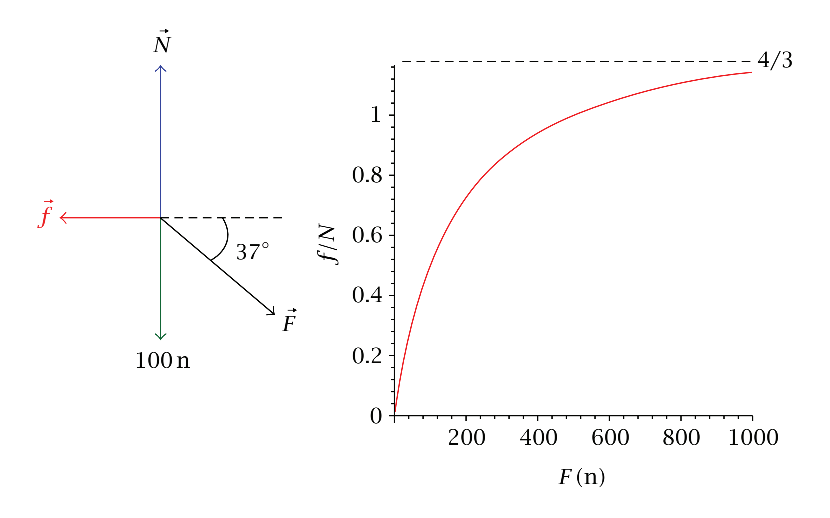


شكل ٢-١٨: (أ) رسم توضيحي لمثال ٢-١٢(أ). (ب) رسم توضيحي لمثال ٢-١٢(ب). (ج) رسم توضيحي لمثال ٢-١٢(ج).



شكل ٢-١٩: مخطط الجسم الحر لمثال ٢-١٢(أ).

$F\cos 37^\circ - f = 0$ و $N - F\sin 37^\circ - (100\,\text{n}) = 0$. بحل المعادلتين لإيجاد f و N نحصل على $f/N = 0.8F/(100 + 0.6F)$. نقوم مرة أخرى برسم منحنًى بياني



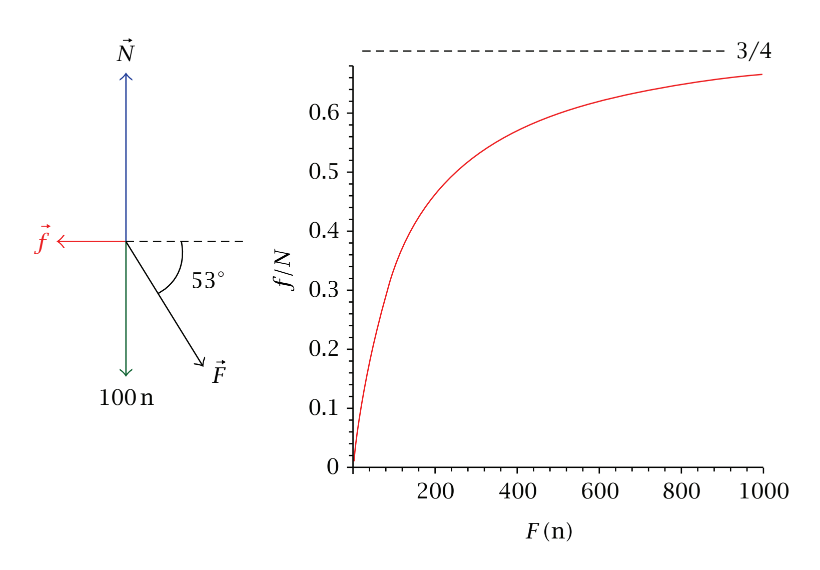
شكل ٢-٢٠: مخطط الجسم الحر لمثال ٢-١٢(ب).

لـ f/N كدالة في القوة المؤثرة F (انظر شكل ٢-٢٠). لاحظ أن f/N هي دالة متزايدة في F، لكنها تئول إلى نهاية محدودة $(f/N \to 4/3)$ عند $F \to \infty$. يحدث الانزلاق عندما تكون النسبة $f/N = 0.8$؛ أي إن $0.8F/(100 + 0.6F) = 0.8$. بحل المعادلة في F، نجد أن $F = 250\,\text{n}$.

بإجراء تحليل مماثل للجزء (ج)، نحصل على $f = F\cos 53^\circ = 0.6F$ و$N = (100\,\text{n}) + F\sin 53^\circ = 100 + 0.8F$ ومن ثَمَّ فإن:

$$\frac{f}{N} = \frac{0.6F}{100 + 0.8F}. \qquad (2\text{–}13)$$

إذا رسمنا مرة أخرى المنحنى البياني لـ f/N كدالة في F (انظر شكل ٢-٢١)؛ فإننا نرى أن قيمة نهاية f/N، عند $F \to \infty$، هي ٠,٧٥. وبذلك يتضح أن النسبة f/N لن تصل أبدًا إلى القيمة ٠,٨ مهما كان مقدار F. ويكون من المستحيل جعل الكتلة تنزلق عن طريق دفعها في اتجاه 53° أسفل الأفقي. ومع الدفع بقوة أكبر فأكبر، يزيد مقدار القوة العمودية N بمعدل سريع بدرجة كافية بحيث يستطيع المستوى دائمًا أن يؤثِّر بقوة احتكاك كبيرة بدرجة كافية لموازنة المركبة الأفقية للقوة المؤثرة $\vec{F}$.



شكل ٢-٢١: منحنى بياني لـ f/N مقابل F لمثال ٢-١٢(ج).

إذا جعلنا f/N (كما هو مُعطى في المعادلة (2-13)) تساوي 0.8 وقمنا بحل المعادلة في F، نحصل على $F = -2000\,\text{n}$. هل لقيمة F السالبة هذه أي مدلول فيزيائي؟ الافتراض البدهي هو أن الدفع السالب يجب أن يُترجَم على أنه سحب وأننا قد أوضحنا أن قوة سحب بمقدار ٢٠٠٠ نيوتن في اتجاه $53°$ أعلى الأفقي ستكون كافية تمامًا لجعل الكتلة تنزلق. إن هذا ليس صحيحًا! إذا قمنا بإعادة التحليل في الجزء (أ) في حالة أن القوة المؤثرة F هي قوة شد في اتجاه $53°$ أعلى الأفقي، فسنجد أن القيمة الحرجة للانزلاق هي $F = 64.5\,\text{n}$. نستنتج أن القيمة $F = -2000\,\text{n}$ ليست ذات دلالة فيزيائية. وهذا يوضح فائدة رسم منحنيات بيانية مثل شكل ٢-٢١ بدلًا من مجرد حل المعادلات شكليًّا. رياضيًّا، السبب في أن قيمة F السالبة لا تناظر قوة سحب هو أنه عند استبدال الرمز F بالرمز $-F$، فإن المعادلات التي تصف الحالة (أ) لا تصل بنا إلى تلك التي تصف الحالة (ب).

(٨) الاحتكاك الحركي

لم نناقش بعدُ قوة الاحتكاك التي يؤثِّر بها سطح ما على آخَر عندما يكون السطحان متحركين بالنسبة إلى بعضهما البعض. نعلم من خبرتنا أن قوة الاحتكاك تُعارِض الحركة النسبية. وبشكل أكثر تحديدًا، إذا كان سطحَا الجسم A والجسم B متماسين، وكان الجسم A يتحرك بسرعة $\vec{v}$ بالنسبة إلى الجسم B (شكل ٢-٢٢)، فإن قوة الاحتكاك التي يؤثِّر بها B على A تكون متوازية عكسيًّا مع $\vec{v}$. نلاحظ أيضًا أنه لكي نحافظ على السرعة النسبية ينبغي أن تكون هناك قوة أخرى مؤثِّرة واحدة على الأقل. إذا كانت هذه القوة مؤثِّرةً على A فلا بد أن تكون لها مركبة مسئولة عن مطابقة قوة الاحتكاك للحفاظ على سرعة A النسبية بالنسبة إلى B. من قانون نيوتن الثالث، تكون قوة الاحتكاك التي يؤثِّر بها A على B متوازية مع $\vec{v}$.

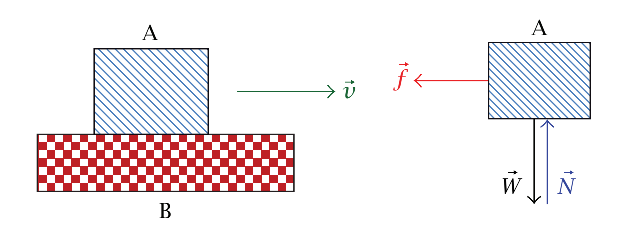
يعتمد المقدار f لقوة الاحتكاك على تكوين ونعومة السطحين، وأيضًا على مقدار القوة العمودية التي يؤثِّر بها أحد السطحين على الآخَر. والأكثر من ذلك، قد يكون من المتوقَّع أيضًا أن تعتمد f على السرعة النسبية للسطحين. تجريبيًّا، وُجِد على نطاق كبير من السرعات، أن f لا تعتمد على السرعة، وأنها تتناسب طرديًّا مع القوة العمودية N.

وبالتالي يمكننا ذِكْر «قانون الاحتكاك الحركي» التجريبي: إذا كان سطح ما A يتحرك بسرعة بالنسبة إلى سطح B، وكان السطحان متلامسين، فإن قوة الاحتكاك التي يؤثِّر بها B على A تكون في اتجاه متوازٍ عكسيًّا مع $\vec{v}$، ومقدارها هو:

$$f = \mu_k N, \tag{2-14}$$

حيث N هو مقدار القوة العمودية التي يؤثِّر بها أحد السطحين على الآخَر.

يُسمَّى المعاملُ μ_k معاملَ الاحتكاك الحركي، وهو لا يعتمد على مساحة التلامس. يجب أن يلاحظ المرء بعناية أن قانون الاحتكاك الحركي ذُكِر في صورة «متساوية رياضياتية» $f = \mu_k N$، بينما كان قانون الاحتكاك الاستاتيكي «متباينة رياضياتية» $f \leq \mu_s N$. عندما لا يكون هناك حركة نسبية للسطحين، فإن القوة العمودية لا تحدد منفردةً قوةَ الاحتكاك، أما مع وجود حركة نسبية، فإن N تحدد منفردة f. وُجِد دائمًا لأي زوجين من الأسطح أن $\mu_k \leq \mu_s$. وهذه نتيجة مباشرة للإجراء التجريبي لقياس

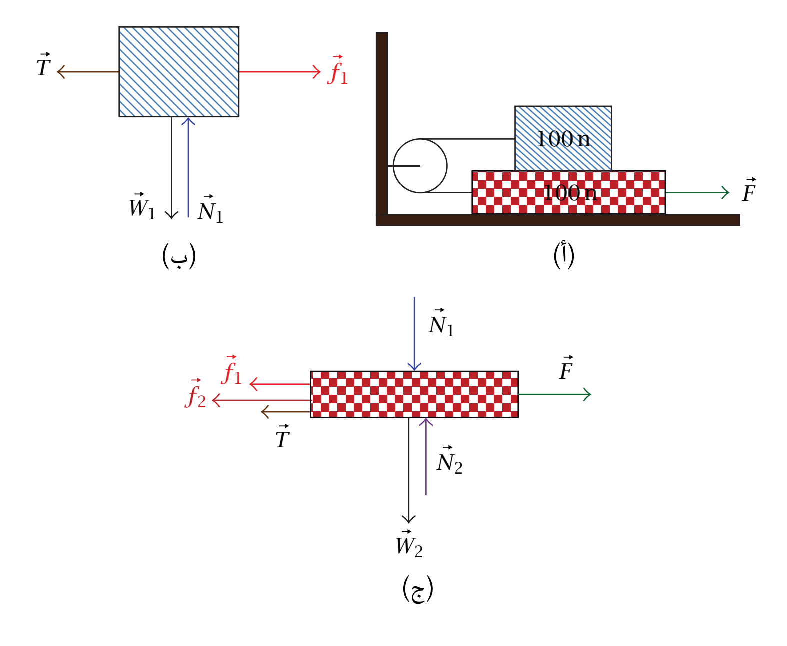


شكل ٢-٢٢: إذا كان A يتحرك نحو اليمين بالنسبة إلى B، فإن قوة الاحتكاك التي يؤثِّر بها B على A تكون متَّجِهةً نحو اليسار.

μ_s. (افترض أن هناك كتلة وزنها W تستقر على منضدة أفقية. سوف تنزلق الكتلة إذا أثرنا بقوة أفقية $\vec{F}$ أكبر في المقدار بقدر متناهي الصغر من $\mu_s W$. لكن بمجرد أن تكتسب الكتلة سرعة صغيرة جدًّا، فإن المنضدة ستؤثر بقوة $\mu_k W$ في اتجاه عكس الحركة. إذا كان $\mu_k > \mu_s$، فستكون هذه القوة أكبر من القوة المُطبقة وستتناقص عجلة الكتلة سريعًا جدًّا حتى تصل إلى السكون. وبالتالي، فإن وجود قوة مقدارها $\mu_k W$ سيكون ضروريًّا لجعل الكتلة تتحرك «بالفعل». سيبدو من وجهة نظر ميكروسكوبية في هذه الحالة، أن معامل الاحتكاك الاستاتيكي هو قيمة μ_k وليس μ_s.)

تُعنَى معظمُ الأمثلة المتعلقة بالاحتكاك الحركي بحالات انعدام الاتزان (تكون فيها الجسيمات متحركة بعجلة ما)؛ وبالتالي لن تُناقَش حتى نصل إلى الفصل الثالث. رغم ذلك، إذا كانت سرعات الجسيمات ثابتةً، فلا بد أن تكون القوة على كل جسيم صفرًا، وهنا يمكن مناقشة المثال في هذا الفصل.

مثال ٢-١٣ (كتلة فوق أخرى متصلتان من خلال بكرة). كتلة وزنها ١٠٠ نيوتن (n) موضوعة فوق كتلة أخرى وزنها ٢٠٠ نيوتن. الكتلتان متصلتان بواسطة وتر غير قابل للمط، يمر من خلال بكرة ملساء مثبتة في حائط (شكل ٢-٢٣(أ)). معامل الاحتكاك الحركي بين الكتلتين هو 0.6، ومعامل الاحتكاك الحركي بين الكتلة السفلية والأرضية هو 0.5. ما القوة الأفقية F التي ينبغي تطبيقها على الكتلة السفلية لإبقائها متحركةً نحو اليمين بسرعةٍ ثابتةٍ؟



شكل ٢-٢٣: (أ) رسم توضيحي لمثال ٢-١٣. (ب) مخطط القوى للكتلة العلوية. (ج) مخطط القوى للكتلة السفلية.

بما أن الوتر غير قابل للمط، فإن الكتلة تتحرك نحو اليسار بسرعة ثابتة (مساوية في المقدار، ومضادة في الاتجاه لسرعة الكتلة السفلية). من قانون نيوتن الأول، تكون القوة على كلٍّ من الكتلتين صفرًا. مخططَا القوى للكتلتين مبيَّنان في شكل ٢-٢٣(ب) و٢-٢٣(ج). القوى المؤثِّرة على الكتلة العلوية هي:

(١) قوة الجاذبية، ومقدارها ١٠٠ نيوتن، متجهة لأسفل.

(٢) القوة العمودية (مقدارها N_1) المؤثرة بواسطة الكتلة السفلية على الكتلة العلوية ومتجهة لأعلى.

(٣) القوة المؤثرة بواسطة الوتر (مقدارها T)، متجهة نحو اليسار.

(٤) قوة الاحتكاك (مقدارها f_1) المؤثرة بواسطة الكتلة السفلية على الكتلة العلوية، متجهة نحو اليمين.

المركبتان الرأسية والأفقية لقانون نيوتن الأول تُعطيان $N_1 = 100\,\mathrm{n}$، و$T = f_1$. علاوة على ذلك، فإن قانون الاحتكاك الحركي يُعطي $f_1 = 0.6(100\,\mathrm{n}) = 60\,\mathrm{n}$؛ ومن ثَمَّ فإن $T = 60\,\mathrm{n}$.

القوى المؤثرة على الكتلة السفلية هي:

(١) قوة الجاذبية، ومقدارها ٢٠٠ نيوتن، متجهة لأسفل.

(٢) القوة العمودية (مقدارها N_2) المؤثرة بواسطة الأرضية على الكتلة السفلية ومتجهة لأعلى.

(٣) القوة المؤثرة بواسطة الوتر (مقدارها T)، متجهة نحو اليسار.

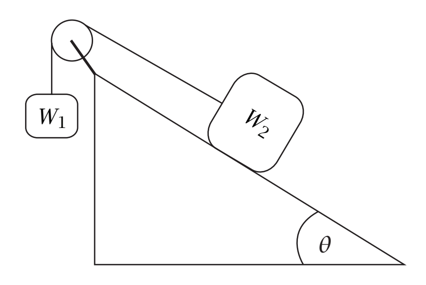
(٤) قوة الاحتكاك (مقدارها f_1) المؤثرة بواسطة الكتلة العلوية على الكتلة السفلية، متجهة نحو اليسار.

(٥) قوة الاحتكاك (مقدارها f_2) المؤثرة بواسطة الأرضية على الكتلة السفلية، متجهة نحو اليسار.

(٦) القوة F متجهة نحو اليمين.

من قانون نيوتن الأول نحصل على $N_2 - N_1 - (200\,\mathrm{n}) = 0$ و$F - T - f_1 - f_2 = 0$. بما أن $N_1 = 100\,\mathrm{n}$، نجد أن $N_2 = 300\,\mathrm{n}$. وبما أن $f_2 = 0.5\,N_2$، نجد أن $f_2 = 150\,\mathrm{n}$. ولأن $T = 60\,\mathrm{n}$ و$f_1 = 60\,\mathrm{n}$، نجد أن $F = 60 + 60 + 150 = 270\,\mathrm{n}$. (إذا طُبِّقَتْ القوة F على الكتلة العلوية بدلًا من الكتلة السفلية، فما قيمة F المطلوبة؟ الإجابة هي أيضًا ٢٧٠! نستطيع بسهولة رؤية هذا لاحقًا عند مناقشة اعتبارات الطاقة.)

بالرغم من أن المثال السابق بسيط إلى حدٍّ ما، فإن التحليل يتطلب اعتبار إحدى عشرة قوة مميزة. وهنا يُحَثُّ الطالب على اكتساب عادةِ الترتيب بعناية (ذهنيًّا إن لم يكن كتابةً) لكل القوى التي تعمل في أي حالة تحت الدراسة أيًّا كانت. دون هذا الترتيب، سيكون من المستحيل تطبيق قوانين نيوتن.



شكل ٢-٢٤: مسألة ٢-١.

(٩) مسائل قانون نيوتن الأول للحركة

المسألة ٢-١. كتلة وزنها $W_1 = 100\,\text{n}$ معلَّقَة رأسيًّا بوتر يلف حول عجلة بكرة ملساء بدون كتلة، ليتصل بوزن W_2 على منحدر عند زاوية $\theta = 30°$ كما هو مبيَّن في شكل ٢-٢٤.

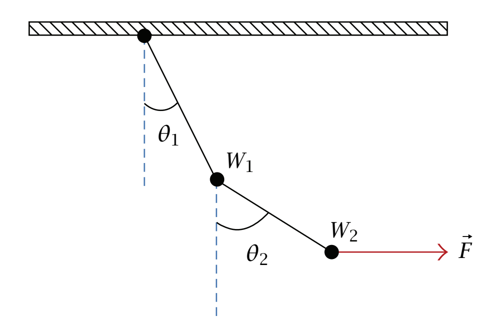
أجب عما يلي:

(أ) إذا كان المنحدر أملس، فما المقدار الذي ينبغي أن يزنه الوزن W_2 للحفاظ على الاتزان؟

(ب) بفرض أن المنحدر له معامل احتكاك استاتيكي مقداره $\mu_s = 0.400$. ما أقصى وأقل قيمة لـ W_2 تتسق مع الاتزان؟

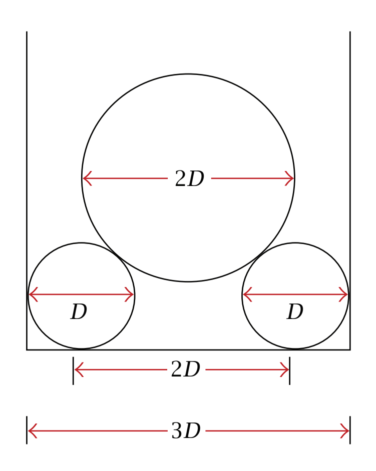
المسألة ٢-٢. وزن W_1 مربوط بالسقف بواسطة وتر، وهناك وتر ثانٍ يصل W_1 بوزن آخَر W_2 مُعَرَّض هو أيضًا لقوة ثابتة أفقية مقدارها F. احسب الزاوية بين الوترين وبين الاتجاه الرأسي، في حالة الاتزان.

المسألة ٢-٣. تزن متزلجة ٦٢٠ نيوتن، وتتحرك لأسفل منحدر يصنع زاوية ثابتة مع الأفقي مقدارها $20.0°$. معامل الاحتكاك الحركي بين لوح التزلج والجليد هو ٠,١٥٠. عند تحرُّك المتزلجة بسرعة $\vec{v}$ (مَقيسة بالمتر/ثانية)، فإن الهواء يؤثِّر عليها بقوة معيقة



شكل ٢-٢٥: مسألة ٢-٢.

مقدارها $0.148\ v^2\,\mathrm{n}$، متوازية عكسيًّا مع سرعتها، وتتحرك بعجلة متزايدة حتى تصل إلى سرعة ثابتة مقدارها v_f، تُسمَّى «السرعة النهائية». احسب سرعتها النهائية.



شكل ٢-٢٦: مسألة ٢-٥.

المسألة ٢-٤. أنبوبة أسطوانية (وزنها W) لها جدران ملساء تستقر في تجويف مستوي الجانبين، يصنع جانباه زاويتين θ_1 وθ_2 مع الأفقي. احسب القوة التي تؤثِّر بها الأنبوبة على كلٍّ من الجدارين.

المسألة ٢-٥. ثلاث أنابيب لها جدران ملساء، تستقر في صندوق مفتوح (عرضه $3D$) له قاعدة أفقية وجدران رأسية، اثنتان منها قُطرهما D ووزنهما W_1، وموضوعتان على قاعدة الصندوق بحيث يفصل بين مركزيهما مسافة $2D$. الأنبوبة الثالثة قُطرها $2D$ ووزنها W_2 ومستقرة على الأنبوبتين الأخريين. احسب القوة على كلٍّ من الجدران الرأسية. [كُنْ حذرًا مع الشكل الهندسي.]

الفصل الثالث

قانون نيوتن الثاني: ديناميكا الجسيمات

(١) ديناميكا الجسيمات

ناقشنا حتى الآن موضوع الأجسام التي تكون في حالة اتزان؛ أي الأجسام التي لا تتعرض لقوة محصلة. وطبقًا لقانون نيوتن الأول، تظل السرعة ثابتةً عندما لا تؤثِّر على الجسم قوة محصلة. ويخبرنا قانون نيوتن الثاني بطريقة كميَّة عن كيفية تعديل الجسم لسرعته عندما تؤثِّر عليه قوةٌ ما.

بكلمات نيوتن نفسه: «يتناسب تغيُّر الحركة طرديًّا مع القوة المحرِّكة، ويكون في اتجاه الخط المستقيم الذي تؤثِّر فيه تلك القوة.»[1] ليست جميع الكلمات الواردة في هذا النص مألوفة للفيزيائي المعاصر. يعرِّف نيوتن «الحركة» بأنها حاصل ضرب «كمية المادة» في السرعة، و«الحركة» عند نيوتن الآن تُسمَّى «كمية التحرك»، كما أن «تغيُّر الحركة» يَعْني لديه «معَّدلَ التغيُّر في الحركة».

ويعبَّر عن هذا بلغة المتجهات الدقيقة على الصورة:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \qquad (3-1)$$

رمزان من الرموز الثلاثة في المعادلة (3–1) تم تعريفهما فعلًا: $\vec{a}$ كمية كينماتيكية صرفة سبق تعريفها في الفصل الأول، و$\vec{F}$ سبق تعريفها في الفصل الثاني. أما الرمز الثالث (m) فيتطلب بعض المناقشة؛ ذلك أن تعريف «الكتلة» بأنها «كمية المادة» غير واضح إلى حدٍّ ما. تتيح لنا المعادلة (3–1) أن نستنبط إجراءً عمليًّا دقيقًا لقياس كتلة جسم ما. تنص المعادلة على أنه إذا أخضعنا جسمًا معيَّنًا لقوى مختلفة، فإن عجلة

الجسم تتناسب مع القوة المؤثرة عليه؛ أي إن $\vec{a} = k\vec{F}$ وثابت التناسب k خاصية للجسم؛ فكلما كانت قيمة k أكبر، كان تعجيل الجسم أيسر. وتُعرَّف كتلة الجسم بأنها مقلوب k؛ أي إن $m = 1/k$.

الكميات الأساسية في النظام الإنجليزي للوحدات هي: الطول (قدم)، والزمن (ثوانٍ)، والقوة (أرطال). وقد عُرِّف الرطل بأنه القوة التي تؤثِّر بها الأرض على جسم عياري معيَّن موضوع في مكان معين. يمكننا استخدام المعادلة (3-1) لتعيين الكتلة m لجسم ما. الكتلة هي القوة المؤثرة على الجسم (مَقيسة بالأرطال) مقسومة على العجلة (مَقيسة بوحدات ft/sec^2). الوحدة الإنجليزية للكتلة تُسمَّى «سلَج»، وهي وحدة مشتقَّة أبعادُها $\text{lb-sec}^2/\text{ft}$. الجسم الذي كتلته ١ سلَج يكتسب عجلة مقدارها $1\,\text{ft/sec}^2$ عندما يتعرض لقوة مقدارها ١ رطل. والجسم الذي كتلته ٢ سلَج سوف يكتسب عجلة مقدارها $0.5\,\text{ft/sec}^2$، عندما يتعرض لقوة مقدارها ١ رطل، وهكذا.

دَعْنَا نطبِّق المعادلة (3-1) على جسم وزنه W يسقط بحرية عند «موضع عياري». وُجِد عمليًّا أن جميع الأجسام التي تسقط بحرية يكون لها نفس العجلة عند مكان معين؛ وعند الموضع العياري تكون القيمة العددية لهذه العجلة (المسمَّاة g) هي $32.174\ \text{ft/sec}^2$، والمعادلة (3-1) تقول إن $W = mg$. بهذا تكون الكتلة m لجسم ما مرتبطة بوزنه W بالمعادلة:

$$m = \frac{W}{g}. \tag{3-2}$$

لاحِظْ أن W وg تعتمدان على المكان الذي يوجد فيه الجسم، لكن قانون نيوتن الثاني يؤكِّد أن m خاصية للجسم لا تعتمد على موضعه. فالجسم الذي كتلته ١ سلج يزن ٣٢٫١٧٤ رطلًا عند الموضع العياري، لكنَّ وزنه يمكن أن يختلف قليلًا عند مكان آخَر.

النظام المتري، الوحدات الأساسية هي: الطول (أمتار)، والزمن (ثوانٍ)، والكتلة (كيلوجرامات). الكيلوجرام يمكن تعريفه بأنه كتلة ١٠٠٠ سنتيمتر مكعب من الماء تحت الظروف العيارية لدرجة الحرارة والضغط، لكن (لمزيد من الدقة) يمكن تعريفه أخيرًا بدلالة ثوابت أساسية أخرى. الوحدة المترية للقوة، النيوتن، هي القوة التي يجب تطبيقها على جسم ما كتلته كيلوجرام واحد، لكي تكسبه عجلة مقدارها ١ متر/ثانية². النيوتن الواحد يساوي نحو ٠٫٢٢٥ رطلًا، والرطل الواحد يساوي ٤٫٤٥ نيوتن تقريبًا.

حالَمَا يكون لدينا جسم كتلته الوحدة، فإننا نستطيع قياس كتلة جسم آخَر بتعريضه مع الجسم العياري لنفس القوة، وقياس النسبة بين عجلتَيِ الجسمين. إذا طبقت نفس القوة على الجسم رقم ١ والجسم رقم ٢، يكون لدينا $M_1a_1 = M_2a_2$؛ وبالتالي إذا كانت $M_1 = 1$ يكون لدينا $M_2 = a_1/a_2$. لاحِظْ أن هذا الإجراء لقياس الكتل لا يتطلب وزنَ الجسم، ولا يتطلب حسابَ عددِ البروتونات والنيوترونات والإلكترونات في الجسم. (يبدو من البدهي أنه إذا كان الجسم مؤلفًا من جسيمات (بروتونات ونيوترونات وإلكترونات) فإن كتلة الجسم تساوي مجموع كتل مكوناته. لكن، إذا كانت النيوترونات والبروتونات متجمعة لتكوِّن نواة ثقيلة، فقد وجد أن كتلة النواة تكون أقل بحوالي ١٪ من مجموع كتل الجسيمات المكوِّنة لها. توقع أينشتاين (على صواب) أن هذا «النقص في الكتلة» يساوي الشغل اللازم لتفكيك النواة مقسومًا على مربع سرعة الضوء. وبهذا يصعب الدفاع عن فكرة نيوتن عن الكتلة باعتبارها «كمية المادة» عندما تكون الجسيمات مرتبطة معًا بقوة نووية شديدة جدًّا. بالمثل، وزن النواة يكون أقل بقدر ملموس من مجموع أوزان الجسيمات المكونة لها. وبرغم هذا فإن جميع الأجسام (بروتونات، نيوترونات، أنوية، كرات بيسبول) تسقط بنفس العجلة g عند أي مكان بعينه. هذه الحقيقة تُحقق منها بدقة عالية لدرجة لا يمكن تخيلها.[2] وهكذا فإن تناسبية الوزن والكتلة، التي تعبر عنها المعادلة $W = mg$، تبدو أنها قانون طبيعي فوق النقد بكثير عن مجرد عملية جمْع للوزن أو الكتلة. في الحياة اليومية، حيث لا تؤخذ القوى النووية في الحسبان، يكون «نقص الكتلة» صغيرًا جدًّا، وتظل خاصية الجمع صحيحة لجميع الأغراض العملية.)

إذا كان $\vec{F} = 0$ فإن المعادلة (3-1) تقول إن $\vec{a} = 0$؛ ولهذا تكون السرعة $\vec{v}$ ثابتة. وهكذا يتضح أن القانون الثاني يتضمن القانون الأول كحالة خاصة. كذلك ينبغي إدراك أنه إذا جعلنا قائمة القوى تقتصر فقط على تلك التي ناقشناها في الفصل الثاني، فإن قانون نيوتن الثاني يكون عندئذٍ صحيحًا فقط في إطار قصوري. على سبيل المثال، إذا استخدمنا محاور عربة شحن دوَّارة بعجلة كبيرة، فإن قانون نيوتن الثاني لا يكون عندئذٍ صحيحًا؛ لأن الجسم سوف يتسارع بالنسبة لمثل هذه المحاور حتى في عدم وجود قوى مؤثِّرة عليه.

سوف نستخدم الآن القانون الثاني لتحليل سلسلة من الأمثلة.

مثال ٣-١ (كتلة على منحدر أملس). تنزلق كتلة m لأسفل منحدر أملس يميل على الأفقي بزاوية θ. احسب عجلة الكتلة والقوة المؤثِّرة عليها بواسطة المستوى.

هناك قوتان تؤثران على الكتلة: قوة تجاذبية تثاقلية مقدارها mg، متجهة رأسيًّا إلى أسفل، وقوة عمودية N يبذلها المستوى. إذا أدخلنا المحورين x وy، فإن المعادلة المتجهة $\vec{F} = m\vec{a}$ تصبح زوجًا من معادلتين:

$$\sum F_x = ma_x, \tag{3–3a}$$

$$\sum F_y = ma_y. \tag{3–3b}$$

في هذه المسألة، من المناسب عادةً اعتبار المحور x موازيًا للمستوى المائل، والمحور y عموديًّا على المستوى المائل (شكل ٣-١(ب))؛ عندئذٍ تكون العجلة في الاتجاه x فقط، وبهذا يكون $a_x = a$، $a_y = 0$. القوة العمودية ليست لها مركبة في الاتجاه x. القوة التثاقلية لها مركبة $mg\sin\theta$ في الاتجاه x، ومركبة $mg\cos\theta$ في الاتجاه y. بهذا تصبح المعادلة (3–3a):

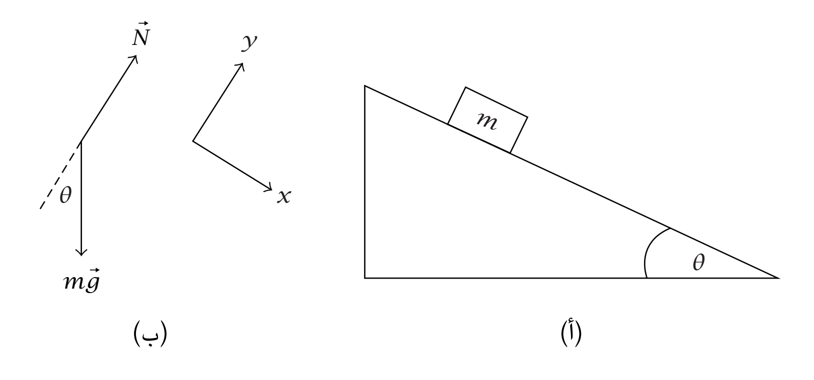
$$mg\sin\theta = ma \tag{3–4}$$

وتُصبِح المعادلة (3–3b):

$$N - mg\cos\theta = 0. \tag{3–5}$$

وينتج أن $a = g\sin\theta$ و$N = mg\cos\theta$.

لاحِظْ أن قانون نيوتن الثاني لا يمكِّننا من حساب العجلة فقط، بل من حساب مقدار القوة العمودية N (التي حددتها حقيقة أن اتجاه العجلة معلوم بحيث يكون حاصل جمع كلِّ القوى العمودية على ذلك الاتجاه يساوي صفرًا). يعتاد العديد من الطلاب أن يكتبوا تلقائيًّا $N = mg\cos\theta$ في جميع المسائل التي تحتوي على مستويات مائلة. والمثال التالي مطلوب ليبيِّن أن N لا تساوي $mg\cos\theta$ دائمًا، وأنه ليس هناك بديل عن تطبيق قوانين نيوتن بطريقة منظمة.

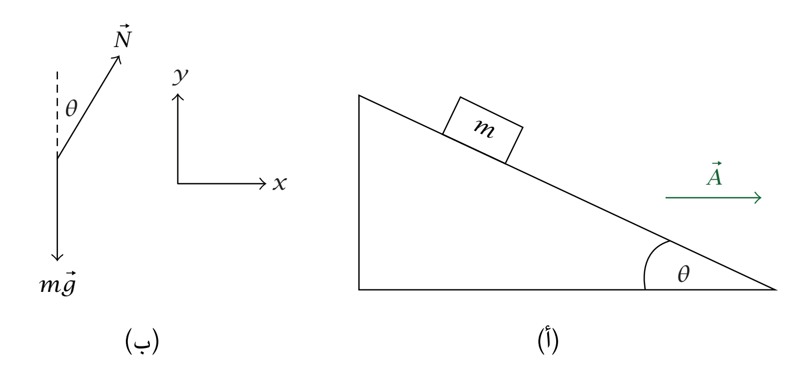


شكل ٣-١: رسم توضيحي (أ) ومخطط الجسم الحر (ب) للمثال ٣-١.

مثال ٣-٢ (كتلة على منحدر أملس متسارع). افترض أن المستوى المائل في مثال ٣-١ هو أحد أَوْجُه وتد (إسفين). افترض أن الوتد متسارِع (متحرك بعجلة) أفقيًّا إلى اليمين (مثلًا، يمكن أن يكون الوتد متصلًا بعربة سكة حديدية متسارعة). إذا اخترت العجلة الصحيحة A للوتد، فإن الكتلة لن تنزلق لأعلى أو لأسفل الوتد، لكنها ستظل ساكنة بالنسبة إلى الوتد. احسب قيمة A الصحيحة، واحسب القوة التي يؤثِّر بها الوتد على الكتلة.

كما في المثال ٣-١، القوى الوحيدة المؤثرة على الكتلة هي قوة الجاذبية mg، متجهة لأسفل، والقوة العمودية $\vec{N}$ المؤثرة بواسطة الوتد. وإذا كانت الكتلة ساكنةً بالنسبة للوتد، فإنها تكون ذات عجلة $\vec{A}$ متجهة أفقيًّا إلى اليمين (لاحِظْ أنَّ هذه هي عجلة الكتلة بالنسبة لإطار قصوري، حالة إطار متسارع مع الوتد «غير جائزة» للاستخدام مع قانون نيوتن الثاني لأنه ليس إطارًا قصوريًّا).

في هذه الحالة يكون من الأنسب كثيرًا اختيار المحور x أفقيًّا، والمحور y رأسيًّا (شكل ٣-٢). المركبتان x وy للقوة $\vec{F} = m\vec{a}$ تعطيان $N \sin\theta = mA$ و$N \cos\theta - mg = 0$، وبهذا نجد أن $N = mg/\cos\theta$ و$A = g\tan\theta$. وحالما أخذنا المحورين x وy في اتجاه موازٍ وعمودي على المنحنى كما فعلنا في مثال ٣-١، فإن العجلة سيكون لها مركبة x هي $A\cos\theta$، ومركبة y هي $A\sin\theta$؛ ومن ثَمَّ فإن المركبتين x وy للقوة $\vec{F} = m\vec{a}$ تصبحان $mg\sin\theta = mA\cos\theta$ و$N - mg\cos\theta = mA\sin\theta$.
بالحل لكلٍّ من A وN نجد أن $A = g\tan\theta$ و$N = mg/\cos\theta$، كما هو متوقع.



شكل ٣-٢: رسم توضيحي (أ) ومخطط الجسم الحر (ب) للمثال ٣-٢.

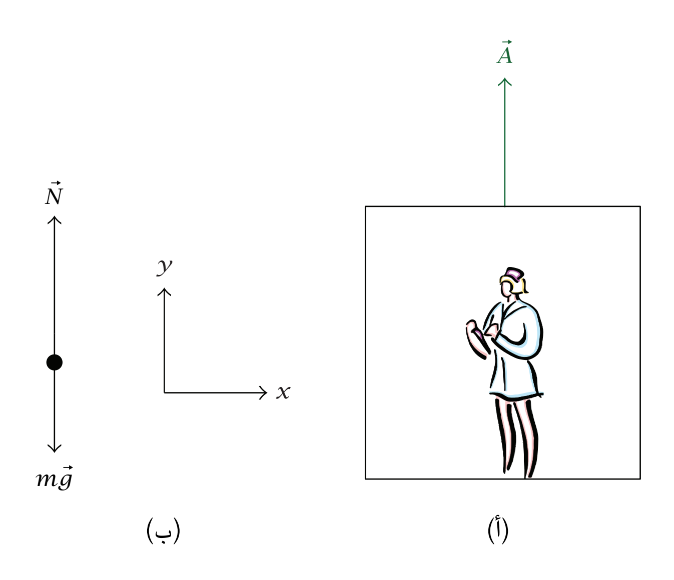
لاحِظْ بعناية أن $\vec{N}$ ليس لها نفس المقدار الذي في مثال ٣-١. ينشأ الفرق من حقيقة أن عجلة الكتلة في مثال ٣-١ موازية للمنحدر، بينما العجلة في هذا المثال أفقية.

مثال ٣-٣ (امرأة في مصعد متسارع إلى أعلى). امرأة كتلتها m واقفة في مصعد متسارع. ما القوة التي تؤثِّر بها الأرضية على قدميها؟

لتفادي اللَّبْس المصاحِب للإشارات، نقدِّم متجه وحدة $\hat{k}$ يشير رأسيًّا إلى أعلى. لتكن عجلة المصعد هي $A\hat{k}$؛ وبهذا فإن قيم A الموجبة تناظِر العجلة إلى أعلى، وقيم A السالبة تناظر العجلة إلى أسفل.

هناك قوتان تؤثِّران على المرأة (شكل ٣-٣): القوة التثاقلية $-mg\hat{k}$ (حيث $W = mg$)، والقوة $N\hat{k}$ التي تبذلها الأرضية. بما أن عجلة المرأة في إطار قصوري هي $A\hat{k}$، فإن قانون نيوتن الثاني يقضي بأن $-mg\hat{k} + N\hat{k} = mA\hat{k}$؛ وبهذا نجد أن $N = m(A + g)$. إذا كانت المرأة واقفة على مقياس زنبركي، فإن مؤشر المقياس يشير إلى مقدار N. إذا كانت A موجبة (عجلة إلى أعلى)، فإن قراءة المقياس تكون أكبر من mg، و«تشعر» المرأة أنها أثقل من المعتاد. وما تشعر به فعلًا هو انضغاط العظام والغضاريف في ساقَيْها، مما يساعد قدَمَيْها على التأثير بقوة N على المقياس. إذا كانت $A = -g$ (مصعد يسقط بحرِّية)، فإن $N = 0$ وتشعر المرأة بانعدام الوزن لأن قدَمَيْها لا تبذلان قوة على الأرضية. في الحقيقة، لا تزال الأرض تؤثر عليها بقوة $-mg\hat{k}$،

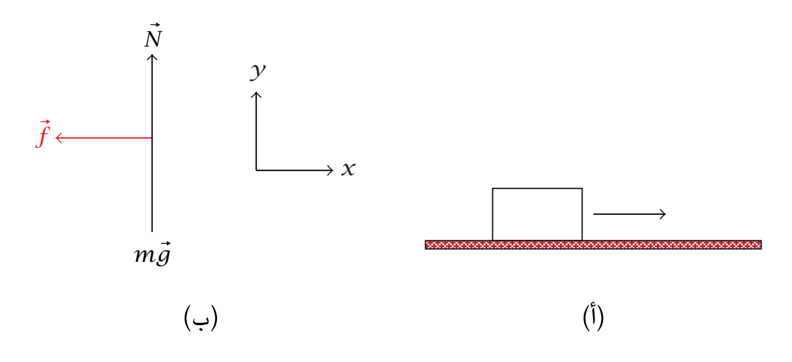
ولكنها تشعر بأنها كما لو كانت تعيش في فضاء خارجي لا يتعرض لأيٍّ قوى جذب تثاقلية.



شكل ٣-٣: رسم توضيحي (أ) ومخطط الجسم الحر (ب) للمثال ٣-٣.

بصورة أعم، يمكننا إثبات أن جميع الظواهر داخل صندوق متسارِع تتشابه مع الظواهر داخل صندوق غير متسارع، ولكنه على كوكب ذي عجلة جاذبية $-(g+A)\hat{k}$ بدلًا من $-g\hat{k}$. إذا لم يكن بالصندوق نوافذ تستطيع أن تنظر من خلالها إلى الخارج، فمن المستحيل أن تعلم ما إذا كان الصندوق متسارعًا أم أنه ببساطة موضوع على كوكب مختلف. القارئ المهتم سوف يجد برهانًا لهذه المسألة في الملحق (ج).

مثال ٣-٤ (كتلة تنزلق أفقيًّا باحتكاك). تنزلق كتلة m على سطح أفقي. معامل الاحتكاك الحركي بين الكتلة والسطح هو μ_k. إذا كان مقدار السرعة الابتدائية هو v_0، فما المسافة التي تتحركها الكتلة قبل أن تصبح ساكنة؟ وما مقدار الزمن الذي تستغرقه الكتلة قبل أن تسكن؟

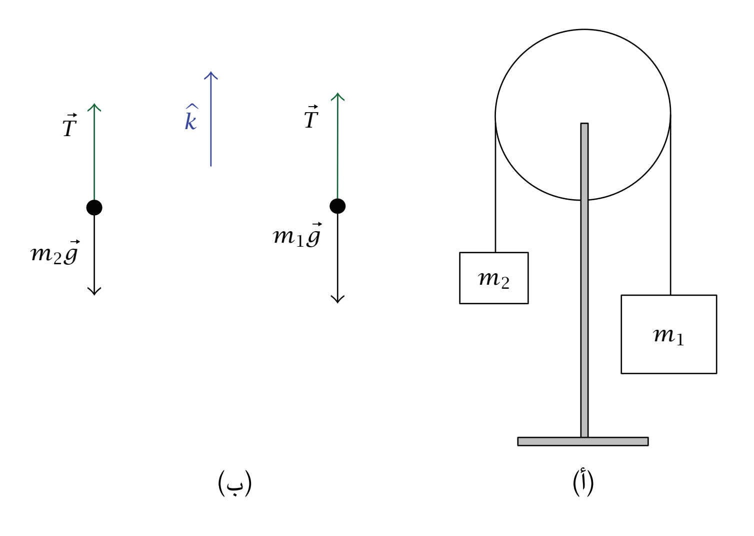


شكل ٣-٤: رسم توضيحي (أ) ومخطط الجسم الحر (ب) للمثال ٣-٤.

هذه المسألة البسيطة جدًّا تشتمل على كلٍّ من الكينماتيكا والديناميكا. ويفضل الأساتذة أن يضعوا هذا النوع من المسائل كامتحان؛ لأنه يختبر معرفة الطالب في المجالَيْن، ويختبر أيضًا ما إذا كان قد دمج المعرفة في صورة قابلة للاستعمال. الديناميكا (أي $\vec{F} = m\vec{a}$) مطلوبة لحساب العجلة التناقصية للكتلة؛ وما إن تُعرَف هذه العجلة التناقصية، فإنه يمكن حساب المسافة والزمن من الصيغ الكينماتيكية المستنتجة في الفصل الأول.

نفترض أن الكتلة تحركت إلى اليمين، ونضع المحورين x وy كما في شكل ٣-٣(ب). العجلة $\vec{a}$ خالصة في الاتجاه x؛ أي إن $a_x = a$، و$a_y = 0$ (نتوقَّع أن تكون a سالبة). القوى المؤثرة على الكتلة (شكل ٣-٣) هي: القوة التثاقلية، والقوة العمودية $\vec{N}$ التي يبذلها السطح، وقوة الاحتكاك $\vec{f}$ التي يبذلها السطح. بكتابة $\sum F_x = ma_x$ و$\sum F_y = ma_y$ نجد أن $-f = ma$ و$N - mg = 0$. بتذكُّر أن $f = \mu_k N$، نجد أن $f = \mu_k mg$ وبهذا تكون $a = -f/m = -\mu_k g$. المسافة المقطوعة D في الإيقاف يمكن إيجادها بسهولة أكثر من المعادلة (1–11d) التي تعطي $D = v_0^2/(2\mu_k g)$. الزمن T اللازم للإيقاف يمكن إيجاده بسهولة أكثر من المعادلة (1–11a) التي تعطي $T = v_0/\mu_k g$.

نطبِّق الآن منهجية نيوتن لتحليل «آلة أتوود» (شكل ٣-٥(أ)) التي تتكون ببساطة من كتلتين (m_1 وm_2) متصلتين بوتر (خيط) يمر فوق بكرة، تُستخدَم دعامة للإبقاء



شكل ٣-٥: رسم توضيحي (أ) ومخطط الجسم الحر (ب) للمثال ٣-٤.

على موضع مركز البكرة ثابتًا (مثلًا، الحامل في شكل ٣-٥(أ)). احسب العجلة لكل كتلة والشد في الوتر. (أوضحنا في الفصل الثاني أنه إذا كان الوتر عديم الوزن والتلامس بين الوتر والبكرة أملس، فإن الشد عند الاتزان يكون هو نفسه عند جميع نقاط الوتر. كان الإثبات مبنيًّا على حقيقة أن القوة الكلية المؤثرة على كل عنصر صغير من الوتر تساوي صفرًا. حتى في حالة عدم الاتزان، يجب أن تكون القوة المؤثرة على عنصر من وتر عديم الوزن تساوي صفرًا؛ إذا كان العنصر بلا وزن، فإنه يكون عديم الكتلة، ويقضي قانون نيوتن الثاني بأن القوة الكلية المؤثرة على عنصر ما تساوي كتلة العنصر (صفرًا) مضروبة في عجلته. وهكذا نستطيع أن نبين، كما سبق، أن الشد هو نفسه عند جميع نقاط الوتر. حتى إذا كان التلامس بين الوتر والبكرة خشنًا، فإن الشد سيكون هو نفسه عند جميع نقاط الوتر إذا كانت البكرة عديمة الكتلة وتدور على محور أملس، سوف يتضح هذا في الفصل الثامن. إذا لم نذكر غير ذلك، فسوف يُفترض أن الأوتار والبكرات عديمة الوزن والمحاور ملساء (لا احتكاكية).)

مثال ٣-٥ (تحليل آلة أتوود). لتحاشي لَبْس الإشارات، نُدخِل متجه وحدة $\hat{k}$ يشير رأسيًّا إلى أعلى. نعرف عجلة m_2 بأنها $a\hat{k}$ (أي إنه إذا كانت a موجبة، فإن عجلة m_2

تتجه إلى أعلى). وحيث إن الوتر غير قابل للمطِّ فرضًا، فإن عجلة m_1 هي $-a\hat{k}$. إذا كان الشد في الوتر هو T، فإن معادلة القوة (قانون نيوتن الثاني) للكتلة m_2 هي:

$$T\hat{k} - m_2 g\hat{k} = m_2 a\hat{k} \tag{3-6}$$

ومعادلة القوة للكتلة m_1 هي:

$$T\hat{k} - m_1 g\hat{k} = -m_1 a\hat{k}. \tag{3-7}$$

وبهذا نحصل على $T - m_2 g = m_2 a$ و$T - m_1 g = -m_1 a$. بحذف T نحصل على:

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}. \tag{3-8}$$

وبالتعويض بهذه المعادلة في أيٍّ من المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$T = 2g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{3-9}$$

يشيع خطأً أن تضع قائمة غير صحيحة للقوى المؤثرة على m_1 وm_2 في المثال السابق. القوتان المؤثرتان على m_1 هما شدُّ الجاذبية إلى أسفل ($-m_1 g\hat{k}$)، وشدُّ الوتر إلى أعلى ($T\hat{k}$). قوة الجاذبية التثاقلية على m_2 ليست قوةً مؤثرة على m_1، وT لا ينبغي أن تُستبدَل بها القوة $m_2 g$ في معادلة القوة الخاصة بالكتلة m_1. بالمثل، T يجب ألَّا تُستبدَل بها القوة $m_1 g$ في معادلة القوة الخاصة بالكتلة m_2.

يجب أن يكتسب المرءُ عادةَ فَحْص الإجابة ليرى ما إذا كانت «معقولةً». وعلى وجه الخصوص، توجد عادةً حالاتٌ خاصة محدَّدة نعرف فيها بالفعل ما هي الإجابة، وإذا كانت إجابتنا صحيحة، فإنها سوف تئول إلى القيمة المتوقعة في هذه الحالات الخاصة. هذا الإجراء سوف يمكِّننا عادةً من اكتشاف الأخطاء الجبرية، بالإضافة إلى الأخطاء في الاستنتاج.

نتوقَّع في المثال السابق أن يكون $a = 0$ إذا كان $m_1 = m_2$، و$a > 0$ إذا كان $m_1 > m_2$. و$a < 0$ إذا كان $m_1 < m_2$. المعادلة (3-8) تتفق مع هذه التوقعات. فضلًا عن ذلك، إذا كان $m_1 = m_2$ يكون لدينا اتزان، ومن ثَمَّ نتوقَّع أن يكون $T = m_1 g$

والمعادلة (3-9) تتفق مع هذا التوقُّع إذا اعتبرنا $m_1 = m_2$. ونعلم الإجابة أيضًا، بدون حساب، في الحالة الخاصة عندما تكون m_1 أكبر كثيرًا من m_2. في هذه الحالة نتوقَّع أن تسقط m_1 مثل الجسم الذي يسقط بحرِّيَّة؛ أي إن $a = g$. في حقيقة الأمر، المعادلة (3-8) تؤدي إلى هذه النتيجة عندما يكون $m_1 \gg m_2$ (يمكننا إهمال m_2 في البسط والمقام)، وتعطي أيضًا $a = -g$ (كما هو متوقَّع) عندما يكون $m_2 \gg m_1$. زيادة على ذلك؛ حيث إن m_2 تتسارع إلى أعلى بعجلة g عندما يكون $m_1 \gg m_2$، فإنه ينتج في هذه الحالة أن القوة الكلية المؤثرة على m_2 يجب أن يكون مقدارها m_2g، ويجب أن يكون اتجاهها إلى أعلى؛ لهذا يجب أن يكون الشد في الوتر $2m_2g$ عندما يكون $m_1 \gg m_2$. المعادلة (3-9) تثبت هذا وتؤكِّده لأن $m_1/(m_1+m_2)$ تقترب من الواحد عندما يكون $m_1 \gg m_2$.

مثال ٣-٦ (تآثر آلة أتوود مع الأرضية). هناك سؤال يتردد كثيرًا حول مثال ٣-٥ وهو التالي: ما القوة المتجهة إلى أعلى $\vec{N}$ التي تؤثِّر بها الأرض على الحامل؟ (بمعنى آخَر، إذا وُضِع الجهاز بأكمله على المقياس، فما هي القراءة التي سوف يبيِّنها المقياس؟) إذا كان الجهاز بأكمله في حالة اتزان، يمكننا على الفور أن نستدلَّ من قانون نيوتن الأول على أن $\vec{N}$ تساوي في المقدار وزن الجهاز. لكن m_1 وm_2 تتحركان بعجلة، ومن ثَمَّ فهما ليستا في حالة اتزان.

من المفيد عند هذه النقطة أن يمتد قانون نيوتن الثاني ليُطبَّق على الأنظمة المركبة (المكوَّنَة من أكثر من جسيم واحد)، تمامًا مثلما فعلنا مع قانون نيوتن الأول. ببساطة نكتب المعادلة $\vec{F}_i = m_i\vec{a}_i$ لكل جسيم في نظامنا قيد الاعتبار (الدليل i يعدد الجسيمات)، ونجمع المعادلات الناتجة لنحصل على $\sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i\vec{a}_i$. إذا حللنا $\vec{F}_i$ إلى جزء خارجي وجزء داخلي، تمامًا مثلما فعلنا في الفصل الثاني، فإن القوى الداخلية تتلاشى زوجًا زوجًا نتيجةً لقانون نيوتن الثالث؛ وبهذا نحصل على:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i m_i\vec{a}_i, \qquad (3\text{-}10)$$

حيث $\vec{F}_{\text{ext}}$ هي القوة الخارجية الكلية (أي صافي القوة أو الحاصل المتجهي) المؤثِّرة على النظام.

إذا كانت كل جسيمات النظام لها نفس العجلة $\vec{a}$، فإن المعادلة (3-10) تصبح:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}, \tag{3-11}$$

حيث M الكتلة الكلية للنظام.

دَعْنَا نطبِّق المعادلة (3-10) على آلة أتوود، معتبرين أن النظام هو الجهاز بأكمله (يشمل الحامل الذي يُفترَض أنه عديم الوزن). لا نستطيع استخدام المعادلة (3-11) لأن أجزاء النظام المختلفة لها تسارُعَاتٌ مختلفة؛ ولهذا يجب أن نستخدم المعادلة (3-10). القوتان الخارجيتان الوحيدتان المؤثرتان على هذا النظام هما الجاذبية الأرضية والقوة العمودية التي تؤثر بها الأرض. بهذا تنص المعادلة (3-10) على أن:

$$-m_1 g\hat{k} - m_2 g\hat{k} + N\hat{k} = m_2 a\hat{k} - m_1 a\hat{k} \tag{3-12}$$

وتعطي $N = (m_2 - m_1)a + (m_1 + m_2)g$. بإدخال معادلتنا السابقة (3-8) للتعويض عن a وإجراء قليل من الجبر، نحصل على:

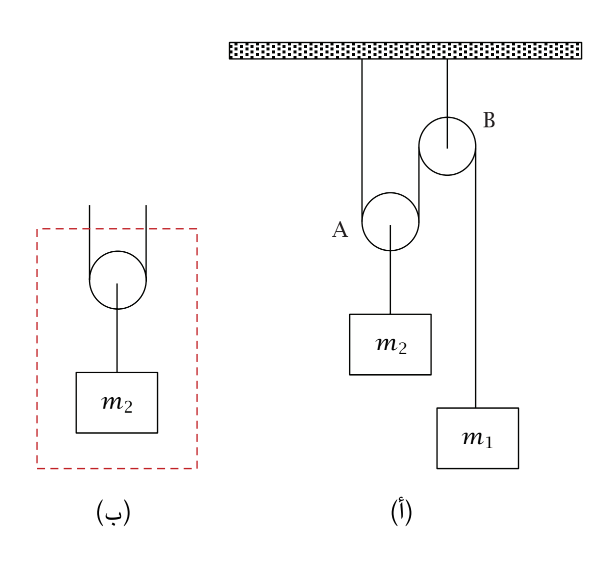
$$N = 4g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{3-13}$$

إذا لم يكن الحامل بلا وزن، فإنه يجب أن تتضمن القوةُ الخارجية وزنَ الحامل، ويضاف ببساطة إلى الطرف الأيمن للمعادلة (3-13). لاحِظْ أنه عندما يكون $m_1 = m_2$ نجد من المعادلة (3-13) أن $N = 2m_1 g$، وهو ما نتوقَّعه في حالة الاتزان. إذا كان $m_1 \neq m_2$، فإنه ينتج من المعادلة (3-13) أن $N < m_1 g + m_2 g$. وبناءً على ذلك، إذا وُضِع الجهاز على مقياس، فإن المقياس سوف يقرأ أقل من وزن الجهاز!

على الرغم من أننا حسبنا N باستخدام معادلة النظرية العامة (3-10)، فإنه يمكننا أيضًا إيجاد N بملاحظة أن الحامل في حالة اتزان. القوى الخارجية الوحيدة التي تؤثر على الحامل هي قوتَا الشد في الوترين إلى أسفل، كلٌّ منهما بقوة T، ودَفْع الأرضية إلى أعلى بقوة مقدارها N. وبهذا نجد أن $N = 2T$، وباستخدام المعادلة (3-9) للتعويض عن T نحصل على المعادلة (3-13).

مثال ٣-٧ (تحليل نظام بكرات مزدوج). دعنا نعتبر نظام البكرات المبيَّن في شكل ٣-٦(أ). البكرتان ملساوان ولا وزنَ لهما. موضع البكرة B ثابت، بينما A

يمكنها أن تتحرك. لقد رأينا بالفعل (مثال ٢-٧) أنه إذا كان $m_1 = (1/2)m_2$ فإن النظام سيكون في حالة اتزان. إذا اخترت m_1 وm_2 عشوائيًّا، فإننا نريد حساب عجلتَيْ كلٍّ من الكتلتين والشد T في الوتر.



شكل ٣-٦: (أ) رسم توضيحي لمثال ٣-٧. (ب) من المفيد اعتبار النظام الفرعي في الصندوق المتقطع.

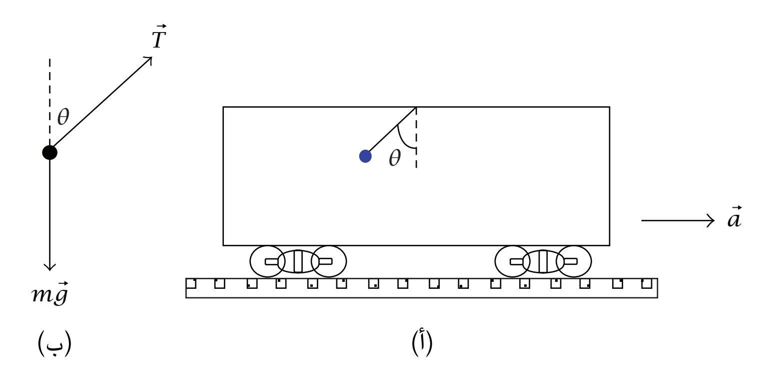
من الضروري التعرُّف على العلاقة بين عجلة m_2 وعجلة m_1. العجز عن فهم هذه العلاقة، التي هي نتيجة مباشِرة لحقيقة أن الطول الكلي للوتر يظل ثابتًا، يعتبر مصدر خطأ شائع جدًّا. ولكي يظل الوتر مربوطًا، فإن m_1 يجب أن تهبط بوصتين مقابل كل بوصة ترتفعها m_2. إذا أدخلنا متجه وحدة $\hat{k}$ يشير رأسيًّا إلى أعلى، وعرَّفنا عجلة m_2 بأنها $a\hat{k}$، فإن عجلة m_1 حينئذٍ تكون $-2a\hat{k}$.

بتطبيق قانون نيوتن الثاني على m_1 نجد أن $T\hat{k} - m_1g\hat{k} = m_1(-2a\hat{k})$. وبتطبيق قانون نيوتن الثاني على m_2 (أو، بدقة أكثر، على النظام الذي يحتويه الصندوق المنقطع في شكل ٣-٦(ب)) نجد أن $2T\hat{k} - m_2g\hat{k} = m_2a\hat{k}$.

بحل هاتين المعادلتين الآتيتين لإيجاد a و T نحصل على:

$$a = g\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2},$$
$$T = 3g\frac{m_1 m_2}{4m_1 + m_2}. \tag{3-14}$$

عندما يكون $m_1 = (1/2)m_2$ فإننا نستعيد مسألة الاستاتيكا. على القارئ أن يتحقَّق من أن معادلتَيْ a و T تئولان إلى القيمتين المتوقعتين عندما يكون $m_1 \gg m_2$، وعندما يكون $m_2 \gg m_1$.



شكل ٣-٧: رسم توضيحي (أ). ومخطط الجسم الحر (ب) للمثال ٣-٨.

مثال ٣-٨ (مقياس عجلة بسيط). عُلِّقَتْ كتلة m بواسطة وتر من سقف عربة سكة حديد متسارعة (شكل ٣-٧). الوتر يصنع زاوية ثابتة θ مع الرأسي. احسب عجلة عربة سكة الحديد.

يحصل معظم الطلاب على إجابة صحيحة لهذه المسألة، لكنَّ كثيرين يستخدمون براهين مريبة مشكوكًا فيها، وتؤدي بالتأكيد إلى لَبْس عند تطبيقها على حالات أكثر تعقيدًا. هذه ليست مسألة استاتيكا! الكتلة m ليست في حالة اتزان؛ فإن لها نفسَ عجلةِ القطار. إذا أدخلنا المحورين المتصلين بالأرض (المحور x الأفقي، والمحور y

الرأسي)، فإن $a_x = a$ و$a_y = 0$. شكل ٣-٧(ب) يوضِّح القوتين المؤثرتين على الكتلة m بواسطة كلٍّ من الكرة الأرضية والوتر. المركبتان x وy للقوة $\vec{F} = m\vec{a}$ تعطيان:

$$T \sin\theta = ma, \quad (3\text{–}15a)$$

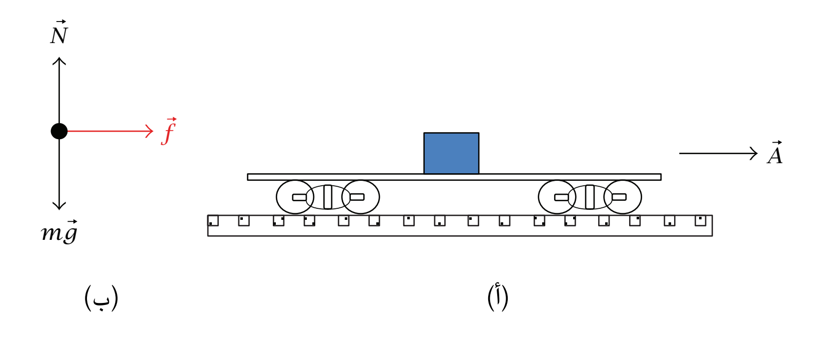
$$T \cos\theta - mg = 0. \quad (3\text{–}15b)$$

بحذف T نحصل على $\tan\theta = a/g$ أو $a = g\tan\theta$.

كثير من الطلاب يستخدمون محاور متصلة بعربة السكة الحديد ويحاولون استخدام قانون نيوتن الأول ($\vec{F} = 0$)؛ لأن الكتلة m ليست متسارعة بالنسبة لهذه المحاور. إلا أن هذه المحاور ليست إطارًا قصوريًّا، ولن يكون قانون نيوتن الأول صحيحًا في إطار الإسناد هذا ما لم نعدِّل تعريفنا للقوة ليشمل قوةً احتكاكيةً من النوع المحدَّد بدقة الذي استبعدناه في الفصل الثاني. «القوة» الثالثة، التي يجب إضافتها إلى شكل ٣-٧(ب) لكي يتلاشى حاصل الجمع المتجهي للثلاث قوى، تتجه أفقيًّا إلى اليسار ومقدارها ma (متَّجهيًّا، «القوة» الثالثة هي $-m\vec{a}$). يستطيع المرء أن يحصل على المعادلتين (3–15a) و(3–15b) إذا أدخل هذه «القوة» الإضافية، ثم استعمل قانون نيوتن الأول، إلا أن هذه «القوة» لا يمكن تفسيرها على أنها دفع أو سحب تؤثر بهما كتلة مادية أخرى على m. ومع أنه من المفيد أحيانًا، في مستوى متقدِّم، استخدام محاور ليست إطارًا قصوريًّا، وإدخال قوى وهمية مناسبة، فإننا نعترض بشدة على استخدام مثل هذه المحاور في مقرَّر تمهيدي.

مثال ٣–٩ (مثال لاحتكاك في اتجاه حركة). صندوق يزن ٢٠٠ نيوتن (n) يستقر على أرضية عربة شحن شكل ٣-٨. معامِلَا الاحتكاك الاستاتيكي والحركي بين الصندوق والأرضية هما $\mu_s = 0.2$ و$\mu_k = 0.1$. افترض أن عربة الشحن كانت في البداية ساكنة، ثم تسارعت بعجلة ثابتة $A = 0.65\,\mathrm{m/s^2}$. احسب عجلة الصندوق والقوة التي تؤثِّر بها الأرضية على الصندوق. أجب عن نفس السؤالين عندما تكون عجلة عربة الشحن $A = 2.5\,\mathrm{m/s^2}$.

من المهم أن يكون لدينا فَهْم كيفي لهذه المسألة قبل كتابة المعادلات. نعلم من الخبرة أنه إذا كان مقدار العجلة $\vec{A}$ لعربة الشحن صغيرًا بدرجة كافية، فإن الصندوق



شكل ٣-٨: رسم توضيحي (أ) ومخطط الجسم الحر (ب) للمثال ٣-٩.

لن ينزلق، ولهذا ستكون عجلة الصندوق أيضًا هي $\vec{A}$. القوة الأفقية الوحيدة المؤثرة على الصندوق هي قوة الاحتكاك التي تبذلها الأرضية عليه. هذه القوة يجب أن تتجه إلى الأمام (إلى اليمين في شكل ٣-٨(ب))، ويجب (لكي تستوفي شروط قانون نيوتن الثاني) أن يكون مقدارها مساويًا لكتلة الصندوق مضروبة في عجلته. إذا كانت A أكبر من قيمة معينة حرجة A_0، فإن القوة الاحتكاكية اللازمة ستكون أكبر من أقصى قوة ممكنة للاحتكاك الاستاتيكي، وسوف ينزلق الصندوق، وستظل الأرضية أثناء الانزلاق تؤثر عليه بقوة أمامية (لأن الصندوق متحرك إلى الوراء بالنسبة للأرضية). هذه القوة، التي يمكن حسابها باستخدام قانون الاحتكاك الحركي (المعادلة (2-14))، سوف تحدد عجلة الصندوق (التي سوف تتجه إلى الأمام، ولكن سيكون مقدارها أصغر من A).

نريد أولًا أن نعرف ما إذا كان الصندوق متسارعًا مع عربة الشحن أم منزلقًا؛ ولذلك يجب أن تحسب قيمة العجلة الحرجة A_0. إذا كانت $A < A_0$ فإن عجلة الصندوق تكون A، ونحصل من قانون نيوتن الثاني على $f = mA$؛ حيث f هي القوة الاحتكاكية التي تبذلها الأرضية، وm هي كتلة الصندوق. وحيث إن الصندوق ليست له عجلة في الاتجاه الرأسي، فيكون لدينا $N - mg = 0$، وبهذا يكون $f/N = A/g$. لكن قانون الاحتكاك الاستاتيكي ينص على أن $f/N \leq \mu_S$. وبناء على ذلك نجد أن الانزلاق يحدث إذا كانت A أكبر من القيمة الحرجة $A_0 = \mu_s g$. باعتبار $g = 9.8\,\text{m/s}^2$ نجد أن $A_0 = .2(9.8) = 1.96\,\text{m/s}^2$ (لاحظ أن A_0 لا تعتمد على كتلة الصندوق)؛ لهذا يكون

للصندوق نفس عجلة عربة الشحن عندما تكون $A = 0.65\,\mathrm{m/s^2}$، وينزلق الصندوق عندما تكون $A = 2.5\,\mathrm{m/s^2}$.

وبالتالي، عندما تكون $A = 0.65\,\mathrm{m/s^2}$، تكون عجلة الصندوق $0.65\,\mathrm{m/s^2}$، وتكون القوة الاحتكاكية هي:

$$f = mA = \frac{200\,\mathrm{n}}{9.8\,\mathrm{m/s^2}} \cdot \left(0.65\,\mathrm{m/s^2}\right) = 13\,\mathrm{n}. \tag{3-16}$$

عندما تكون $A > A_0$ تكون القوة الاحتكاكية $f = \mu_k N = \mu_k mg$. تستنتج عجلة الصندوق a من قانون نيوتن الثاني $f = ma$، الذي يعطي $a = \mu_k g$. وبهذا، عندما يكون $A = 2.5\,\mathrm{m/s^2}$ نجد أن عجلة الصندوق هي $a = (0.1)(9.8\,\mathrm{m/s^2}) = 0.98\,\mathrm{m/s^2}$ (مرةً ثانيةً لا تعتمد على كتلة الصندوق). القوة الاحتكاكية هي:

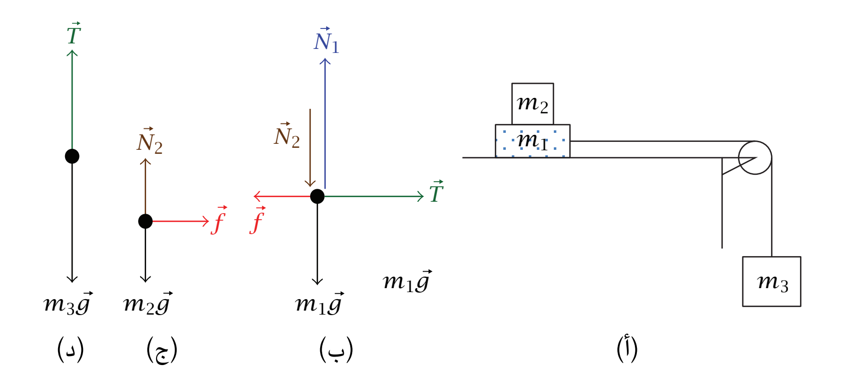
$$f = \mu_k mg = (0.1)\,(200\,\mathrm{n}) = 20\,\mathrm{n}. \tag{3-17}$$

لاحظ أنه عندما تكون $A > A_0$ فإن عجلة الصندوق والقوة الاحتكاكية لا تعتمدان على A.

مثال ٣–١٠ (كتلتان بينهما احتكاك متبادَل مسحوبتان بثالثة على سطح أملس). اعتبر الجهاز المبيَّن في شكل ٣-٩(أ)؛ حيث m_1 على سطح أفقي أملس، ومعامِلَا الاحتكاك بين m_1 وm_2 هما $\mu_s = 0.2$ و$\mu_k = 0.1$. لكل قيم m_3، نرغب في إيجاد عجلة m_1، وعجلة m_2، والشد في الوتر، والقوة الأفقية التي تؤثِّر بها m_1 على m_2.

هذا المثال نسخة معقَّدَة قليلًا من المثال ٣–٩. نتوقع أن يكون لكلٍّ من m_1 وm_2 نفس العجلة، إذا كانت m_3 صغيرة بدرجة كافية، لكن إذا كانت m_3 أكبر من قيمة حرجة معينة، فإن الكتلة الأعلى (m_2) سوف تنزلق. إننا بحاجة ملحة من الآن لأن نوضِّح أن الشد في الوتر لا يساوي $m_3 g$ (خطأ شائع)؛ إذا كان الشد في الوتر $m_3 g$ فإن m_3 ستكون في حالة اتزان ولن تتسارع.

لنعتبر متجه وحدة $\hat{i}$ يشير أفقيًّا إلى اليمين، ومتجه وحدة $\hat{k}$ يشير رأسيًّا إلى أعلى، ونعرِّف عجلة m_1 بأنها $A_1\hat{i}$ وعجلة m_2 بأنها $A_2\hat{i}$. وبفرض أن الوتر غير قابل للمط، تكون عجلة m_3 هي $-A_1\hat{k}$. لقد اعتبرنا متجهَي الوحدة فقط لتحاشي أخطاء الإشارات، وعلى القارئ من الآن أن يكون قادرًا على الاستغناء عنهما. يوضح



شكل ٣-٩: رسم توضيحي (أ) للمثال ٣-١٠، ومخطط الجسم الحر للكتلة m_1 (ب)، والكتلة m_2 (ج)، والكتلة m_3 (د).

شكل ٣-٩(ب)، (ج)، (د) مخططات بيانية لجسم حر للكتل الثلاث. N_2 هو مقدار القوة العمودية التي تبذلها إحدى الكتلتين على الأخرى، وf هو مقدار القوة الاحتكاكية، وN_1 هو مقدار القوة العمودية التي تؤثِّر بها المنضدة على الكتلة السفلى. ونظرًا لعدم وجود عجلة رأسية لأيٍّ من m_1 أو m_2، فإننا نجد (من شكل ٣-٩(ج)) أن $N_2 = m_2g$ و(من شكل ٣-٩(ب)) أن $N_1 = (m_1 + m_2)g$.

تطبيق قانون نيوتن الثاني على كل كتلة يعطي:

$$f = m_2A_2, \tag{3–18a}$$

$$T - f = m_1A_1, \tag{3–18b}$$

$$T - m_3g = -m_3A_1. \tag{3–18c}$$

لننظر أولًا إلى حالة m_1 وm_2 عندما يكون لهما نفس العجلة $(A_1 = A_2)$. بإضافة المعادلتين (3–18a) و(3–18b) نحصل على $T = (m_1 + m_2)A_1$ (التي يمكن الحصول عليها أيضًا بتطبيق قانون نيوتن الثاني على الجسم المركب من الكتلتين).

بالتعويض عن T في المعادلة (3-18c) نجد أن $A_1 = gm_3/(m_1 + m_2 + m_3)$. وتُعطى القوة الاحتكاكية بالمعادلة:

$$f = \frac{gm_2m_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \tag{3-19}$$

وبما أن $N_2 = m_2g$ فيكون لدينا:

$$\frac{f}{N_2} = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \tag{3-20}$$

هذا الحل متوافِق مع قانون الاحتكاك الاستاتيكي، بشرط أن يكون $f/N_2 \le \mu_s$. إذا كان $\mu_s = 0.2$ فإننا نستطيع إيجاد قيمة m_3 الحرجة بوضع $f/N_2 = 0.2$؛ وبهذا نجد أن $f/N_2 \le 0.2$ إذا كان $m_3 \le 0.25(m_1 + m_2)$.

لاحظ أن الطرف الأيمن للمعادلة (3-20) يكون دائمًا أقل من ١؛ ولهذا فإنه في حالة $\mu_s \ge 1$، لا يمكن أبدًا أن تنزلق m_2 بالنسبة إلى m_1 مهما زادت قيمة m_3. إذا كان $\mu_s < 1$ فإن قيمة m_3 الحرجة (الناتجة بوضع $f/N_2 = \mu_s$) تكون $m_3 = \mu_s(m_1 + m_2)/(1 - \mu_s)$، التي تتفق مع النتيجة السابقة عندما يكون $\mu_s = 0.2$.

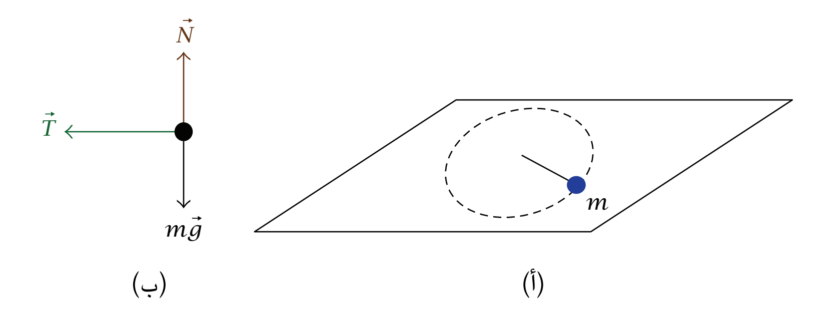
إذا كانت $m_3 > 0.25(m_1 + m_2)$، فإن m_2 تنزلق بالنسبة إلى m_1. تُعطى القوة الاحتكاكية f بقانون الاحتكاك الحركي $f = 0.1(m_2g)$، ومن المعادلة (3-18a) نجد أن $A_2 = 0.1g$. نستطيع الآن حل المعادلة (3-18b)، والمعادلة (3-18c) لإيجاد المجهولين A_1 وT، ونحصل على:

$$\begin{aligned} A_1 &= g\frac{m_3 - .1m_2}{m_1 + m_3}, \\ T &= m_3g\frac{m_1 + .1m_2}{m_1 + m_3}. \end{aligned} \tag{3-21}$$

على القارئ الذي يستهويه هذا النوع من المسائل أن يتولى بنفسه ربط الوتر بالكتلة m_2 بدلًا من m_1، أو يقوم بإدخال احتكاك عند سطح التلامس بين المنضدة وm_1.

مثال ٣-١١ (كتلة نقطية تُدار على مسار دائري). ربما يكون هذا المثال أبسط مسألة ديناميكية تشتمل على حركة دائرية. يوصل أحد طرفَيْ وتر مربوط بنقطة ثابتة على

سطح أفقي أملس، ويوصل الطرف الآخَر بجسيم كتلته m، يتحرك في دائرة نصف قطرها r، بسرعة ثابتة مقدارها v. احسب الشد في الوتر.



شكل ٣-١٠: رسم توضيحي (أ) ومخطط الجسم الحر (ب) للمثال ٣-١١.

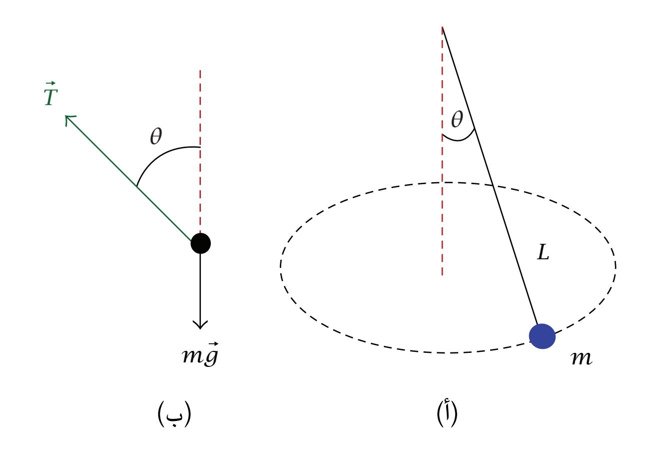
الجسيم ليس في حالة اتزان لأن اتجاه متجه السرعة متغير، وطبقًا للمعادلة (1.17) يكون للجسيم عجلة مقدارها v^2/r متجهة نحو مركز الدائرة. القوة الأفقية الوحيدة المؤثرة على الجسيم هي التي يبذلها الوتر (شكل ٣-١٠(ب))، وتتجه أيضًا نحو مركز الدائرة. يتطلب قانون نيوتن الثاني أن يكون الشد في الوتر $T = mv^2/r$.

القوة التي يبذلها الوتر تسمى أحيانًا القوة الجاذبة المركزية، وعبارة «جاذبة مركزية» تعني ببساطة «المتجهة نحو المركز». المصطلح «قوة جاذبة مركزية» سيئ الحظ إلى حدٍّ ما؛ لأنه يعطي إيحاءً معيَّنًا يؤدي بكثير من الطلاب إلى الاعتقاد (خطأً) بأن مثل هذه القوة مختلفة في النوع بطريقة ما عن القوى الأخرى. وإذا ما طُلِبَ عَدُّ القوى المؤثرة على m، فإن بعض الطلاب يجيبون: «الجاذبية، والقوة العمودية التي تبذلها المنضدة، والقوة الجاذبة المركزية.» أما الإجابة الأفضل فهي: «الجاذبية، والقوة العمودية التي تبذلها المنضدة، والقوة التي يبذلها الوتر.» عمومًا، سوف نتحاشى استخدام المصطلح «القوة الجاذبة المركزية».

أما ما يجب تجنُّبه بقوة أكثر فهو كلٌّ من مصطلح «القوة الطاردة المركزية» ومفهومه؛ فهي قوة وهمية، متجهة قطريًّا إلى الخارج ومقدارها mv^2/r، ويجب إضافتها إلى شكل ٣-١٠(ب) إذا كان يُراد الإصرار على أن الجسيم في حالة اتزان. في

إطار قصوري لا يكون الجسيم في حالة اتزان، ولا يستطيع المرء أن يحدد أي قطعة من المادة تبذل قوة على m في الاتجاه إلى الخارج قطريًّا.

لاحظ أنه في حالة ما إذا قُطِع الوتر فجأةً فإنه لن تكون هناك عندئذٍ قوة مؤثرة على m، وسوف يظل مقدار السرعة واتجاهها ثابتين. بناء على ذلك سوف يتحرك الجسيم على طول خط مستقيم مماس لمساره الدائري الأصلي. يعتقد البعض، على أسس من «الحدس»، أنه إذا ما قُطِع الوتر فإن الجسيم سوف يطير إلى الخارج على طول خط قطري، وإذا ما صحَّ هذا فإن الجسيم عليه أن يغيِّر اتجاه متجه سرعته فجأةً في اللحظة التي يُقطَع فيها الوتر. هذا سوف يتطلب عجلة لا نهائية عند هذه اللحظة، ومن ثَمَّ قوة لا نهائية. وبما أن القوة التي يؤثِّر بها الوتر على الجسيم محدَّدة تمامًا إلى أن يقطع الوتر، وتصبح صفرًا بعد ذلك، فإنه ينتج عن ذلك ألَّا يغيِّر متجه السرعة اتجاهه عند لحظة قطع الوتر.



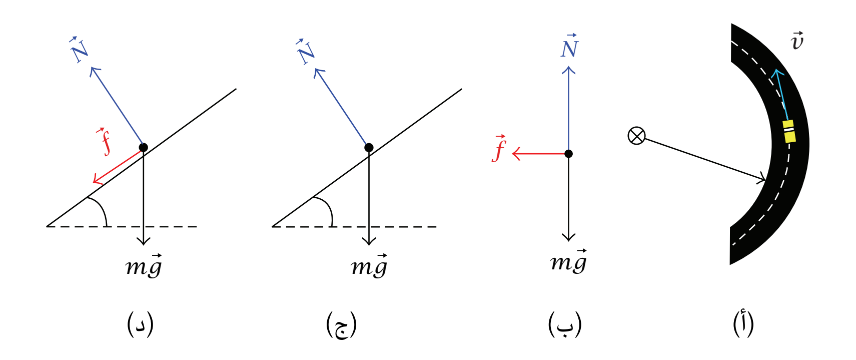
شكل ٣-١١: رسم توضيحي (أ) ومخطط الجسم الحر (ب) للمثال ٣-١٢.

مثال ٣-١٢ (بندول مخروطي). عُلِّق جسيم كتلته m من السقف بواسطة وتر طوله L. إذا بدأ الجسيم يدور بإحكام في دائرة أفقية بسرعة مقدارها ثابت، فإن الوتر يصنع

زاوية ثابتة θ مع الاتجاه الرأسي. احسب المقدار الصحيح للسرعة v التي يجب أن يبدأ بها الجسيم حركته.

نصف قطر الدائرة التي يرسمها الجسيم هو $L\sin\theta$، وبهذا يكون مقدار عجلة الجسيم هو $v^2/(L\sin\theta)$ وتتجه أفقيًّا نحو مركز الدائرة. القوتان الوحيدتان المؤثرتان على الجسيم هما المبذولتان بواسطة الوتر والجاذبية الأرضية (شكل ٣-١١(ب)). المركبتان الرأسيتان للقوة $\vec{F} = m\vec{a}$ تعطيان $T\cos\theta - mg = 0$ و$T\sin\theta = mv^2/(L\sin\theta)$. بحذف T من هاتين المعادلتين نحصل على $v^2 = gL\sin^2\theta/\cos\theta$. الزمن الدوري للبندول (الذي نسميه t) هو الزمن اللازم لكي يكمل الجسيم دائرة حركة؛ أي:

$$t = 2\pi\frac{L\sin\theta}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}. \tag{3-22}$$



شكل ٣-١٢: (أ) منظر علوي لسيارة تتحرك على جزء منحنٍ من طريق (مثال ٣-١٣). (ب) (انظر مثال ٣-١٣) مخطط الجسم الحر للسيارة إذا كان الطريق غير مائل. (ج) مخطط الجسم الحر إذا لم يكن هناك احتكاك وكان الطريق مائلًا. (انظر مثال ٣-١٣) مخطط الجسم الحر إذا كان هناك (د) احتكاك وكان الطريق مائلًا، والسيارة تُقاد أسرع من السرعة «الصحيحة» v_0.

مثال ٣-١٣ (تصميم طريق عام). تُقاد سيارة على طول طريق بسرعة مقدارها ثابت، مقتربة من منحنى. نريد تحديد ما إذا كانت السيارة ستنزلق جانبيًّا أثناء اجتيازها المنحنى.

إذا كانت السيارة تجتاز المنحنى بدون انزلاق، فإن عجلتها عندئذٍ تتجه نحو مركز المنحنى ويكون مقدارها v^2/R؛ حيث R نصف قطر المنحنى (شكل ٣-١٢(أ))، ويجب إذن أن يكون اتجاه صافي القوة المؤثرة على السيارة نحو مركز المنحنى، وأن يكون مقدارها mv^2/R.

دعنا نفترض أولًا أن الطريق ليس مائلًا. عندئذٍ تكون القوة الأفقية الوحيدة المؤثرة على السيارة قوة احتكاكية f يؤثر بها الطريق على إطارات السيارة (انظر شكل ٣-١٢(ب)). هذه القوة يجب أن تتجه نحو مركز المنحنى، ومن ثَمَّ تكون عمودية على اتجاه حركة السيارة. وطالما أن السيارة لا تنزلق، فإن جزء الإطار الذي يلمس الطريق يكون ساكنًا لحظيًّا (سوف تُناقَش كينماتيكا الدحرجة بتفصيل أكثر في الفصل الثامن)، وينتج إذن أن القوة f تنشأ بالاحتكاك الاستاتيكي، بدلًا من الاحتكاك الحركي. المركبة نصف القطرية للقوة $\vec{F} = m\vec{a}$ تعطي $f = mv^2/R$ والمركبة الرأسية تعطي $N - mg = 0$. قانون الاحتكاك الاستاتيكي يستلزم أن يكون $f/N \le \mu_s$. وبهذا نرى أن السيارة يمكن أن تجتاز المنحنى بدون أن تنزلق إذا كان $v^2/gR \le \mu_s$. على سبيل المثال، إذا كان $R = 100\,\mathrm{m}$ و$\mu_s = 1$ (وهي قيمة معقولة بالنسبة لإطار من المطاط يتحرك على طريق مسفلت جاف)،[3] نجد أن القيمة الحرجة للسرعة v هي $31\,\mathrm{m/s}$ أو حوالي ٦٩ ميلًا لكل ساعة. تعلم كثير من السائقين من خبرات غير سارة أن μ_s والسرعة الحرجة يقلان عند السير على طريق مبلَّل أو مغطًّى بالجليد.

أما إذا كان الطريق مائلًا، فإن السيارة يمكنها أن تجتاز المنحنى بدون انزلاق حتى لو كان اليوم جليديًّا تمامًا، بشرط أن تقاد بالسرعة الصحيحة. ولحساب مقدار هذه السرعة، التي نسميها v_0، نعتبر مخطط الجسم الحر للسيارة (شكل ٣-١٢(ج)). افترضنا أثناء رسم هذا المخطط البياني أن الطريق لا يبذل أي قوة احتكاكية على السيارة. يميل الطريق بزاوية θ على الأفقي، وتسير السيارة عموديًّا على الصفحة. تتجه عجلة السيارة أفقيًّا إلى اليسار (إذا كانت السيارة لا تنزلق لأعلى المنحدر أو لأسفله)، ويكون مقدارها v_0^2/R. بهذا تعطي المركبتان الأفقية والرأسية للقوة $\vec{F} = m\vec{a}$ المعادلتين $N\sin\theta = mv_0^2/R$ و$N\cos\theta - mg = 0$. وبحذف N، نجد أن $v_0^2 = gR\tan\theta$.

وإذا كان الطريق يميل بزاوية $\theta = \tan^{-1}(v_0^2/gR)$؛ حيث v_0 مقدار السرعة المتوسطة التي يقود بها الناس، فإن الطريق لن يبذل أي قوة جانبية على السيارة العابرة للمنحنى بسرعة مقدارها v_0، وحتى في اليوم الزلِق لن تنزلق السيارة إذا كانت تقاد بهذه السرعة. من الواضح أن مهندسي الطرق العمومية لا يستخدمون هذه المعادلة التي تعطي $\theta = 36^\circ$ إذا كان $R = 100\,\mathrm{m}$ و$v_0 = 60\,\mathrm{mi/hr}$.

ماذا سيحدث إذا قاد السائق في الجزء المنحني بسرعة مقدارها مختلف عن مقدار السرعة «الصحيحة» v_0؟ إذا كان الطريق زلقًا تمامًا ($\mu_s = 0$)، فإن السيارة سوف تنزلق إلى خارج المنحنى إذا كانت $v > v_0$، وستنزلق إلى داخل المنحنى إذا كانت $v < v_0$.

السؤال العملي التالي أكثر أهمية: ما مقدار أقصى سرعة v يمكن أن تقاد بها السيارة في الجزء المنحني بدون انزلاق، وذلك عند قيم معينة لنصف قطر الانحناء R، وزاوية الميل θ، ومعامل الاحتكاك الاستاتيكي μ_s؟ شكل ٣-١٢(د) هو مخطط الجسم الحر للسيارة عندما تقاد بسرعة مقدارها $v > v_0$ (تُعرَّف v_0 بأنها $\sqrt{gR\tan\theta}$). في هذه الحالة تتجه القوة الاحتكاكية $\vec{f}$ التي يبذلها الطريق على الإطارات لأسفل المنحدر (إذا كان $v < v_0$ تتجه القوة الاحتكاكية لأعلى المنحدر). المركبتان الأفقية والرأسية للقوة $\vec{F} = m\vec{a}$ تعطيان:

$$\begin{aligned} N\sin\theta + f\cos\theta &= \frac{mv^2}{R}, \\ N\cos\theta - f\sin\theta - mg &= 0. \end{aligned} \tag{3–23}$$

بالحل لإيجاد الكميتين المجهولتين f وN نحصل على:

$$f = \frac{mv^2}{R}\cos\theta - mg\sin\theta, \tag{3–24a}$$

$$N = \frac{mv^2}{R}\sin\theta + mg\cos\theta. \tag{3–24b}$$

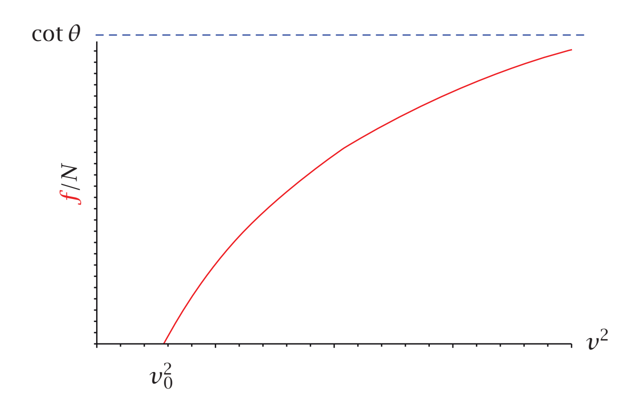
يمكن الحصول على المعادلتين (3–24a) و(3–24b) مباشَرةً، إذا أخذنا محورينا في الاتجاهين الموازي للمستوى المائل والعمودي عليه، بدلًا من الاتجاهين الأفقي والرأسي.

لاحظ أن العجلة لها مركبة $(v^2/R)\cos\theta$ على طول المنحدر، ومركبة $(v^2/R)\sin\theta$ عمودية على المنحدر.

يمكن إعادة كتابة المعادلة (3-24a) على الصورة:

$$f = \frac{m}{R}\cos\theta\left(v^2 - v_0^2\right) \tag{3-25}$$

مما يوضِّح أن f موجبة (أي إن القوة الاحتكاكية تتجه لأسفل المنحدر) عندما يكون $v > v_0$ القيمة السالبة لـ f عندما يكون $v < v_0$ تعني أن القوة الاحتكاكية تتجه لأعلى المنحدر.



شكل ٣-١٣: الرسم البياني للنسبة بين القوتين الاحتكاكية والعمودية كدالة في مربع مقدار سرعة السيارة، عندما تكون السرعة أكبر من السرعة «الصحيحة» v_0.

لتحديد ما إذا كانت السيارة تنزلق، علينا فحص النسبة f/N من المعادلتين (3-24a) و(3-24b) ومن هذا نجد أن:

$$\frac{f}{N} = \frac{(v^2/gR)\cot\theta - 1}{(v^2/gR) + \cot\theta}. \tag{3-26}$$

يوضح شكل ٣-١٣ رسمًا بيانيًّا للطرف الأيمن للمعادلة (3-26) عندما يكون $v > v_0$. لاحظ أن f/N تئول إلى القيمة النهائية $\cot\theta$ كلما $v \to \infty$. إذا كان $\mu_s > \cot\theta$ فإن

النسبة f/N لن تزيد أبدًا عن μ_s، وسوف تنزلق السيارة مهما زادت سرعة قيادتها. إذا كان $\mu_s < \cot\theta$ فإن $f/N = \mu_s$ عندما يكون:

$$\frac{v^2}{gR} = \frac{\mu_s \cot\theta + 1}{\cot\theta - \mu_s} \qquad (3\text{–}27)$$

ومقدار السرعة التي تعطيها المعادلة (3–27) هو أقصى مقدار للسرعة التي يمكن أن تقاد بها السيارة لاجتياز المنحنى دون انزلاق.

إذا أردنا فحص إمكانية الانزلاق إلى أسفل المنحدر عندما يكون $v < v_0$، ينبغي أن نفحص النسبة $|f|/N$ (لأن f سالبة في هذه الحالة). الرسم البياني $|f|/N$ عندما يكون $v < v_0$ موضح في شكل ٣-١٤. لاحظ أن النسبة $|f|/N$ تكون عظمى عندما تكون $v = 0$ وقيمتها $\tan\theta$، وإذا كان $\mu_s > \tan\theta$ فإن السيارة لن تنزلق لأسفل المنحدر مهما تباطأت قيادتها. إذا كان $\mu_s < \tan\theta$ نحصل على مقدار السرعة الحرجة بوضع $|f|/N = \mu_s$ وبهذا يكون:

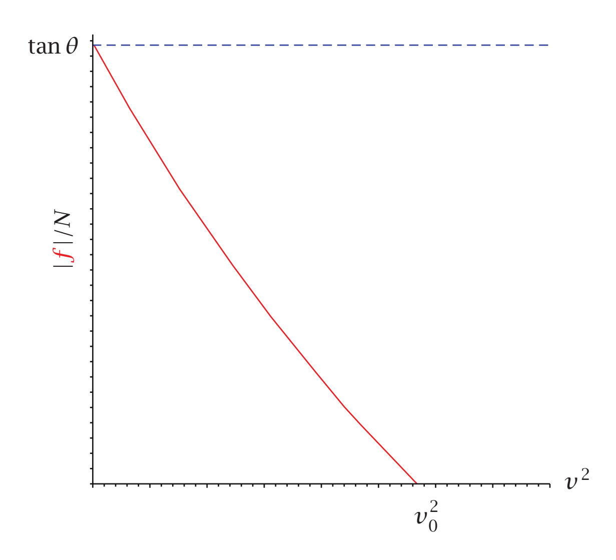
$$\frac{v^2}{gR} = \frac{1 - \mu_s \cot\theta}{\mu_s + \cot\theta}. \qquad (3\text{–}28)$$

إذا كانت السيارة تقاد ببطء أكثر من مقدار السرعة المُعطى بالمعادلة (3–28)، فإنها ستنزلق لأسفل المنحدر.

إذا كان μ_s أكبر من كلٍّ من $\tan\theta$ و$\cot\theta$ فإن السيارة يمكن قيادتها بأي سرعة دون انزلاق. هذا الشرط لا يمكن تحقيقه على طريق عادي؛ لأن θ صغيرة جدًّا (و$\cot\theta$ كبيرة جدًّا)، وإنما يمكن تحقيقه على حلبة السباق. على سبيل المثال، يمكن أن يكون لدينا $\mu_s = 1.2$ و$\theta = 45°$. لاحظ أنه إذا كان $R = 100\,\text{m}$ وزاوية الميل $45°$ فإن مقدار السرعة «الصحيحة» التي يُعبَر بها المنحنى هي:

$$\sqrt{gR\tan\theta} = 31\,\text{m/s} = 70\,\text{mi/hr}. \qquad (3\text{–}29)$$

عند هذه السرعة لن يؤثِّر الطريق بأي قوة جانبية على الإطارات، وسيكون التأثير على المركبات الميكانيكية أدنى ما يمكن. وسوف تجتاز سيارة السباق المنحنى بسرعة مقدارها أكبر بقدر ملموس من مقدار السرعة «الصحيحة».



شكل ٣-١٤: الرسم البياني لنفس النسبة عندما يكون مقدار السرعة أقل من v_0.

(٢) حركة الكواكب والأقمار الصناعية؛ قانون نيوتن للجاذبية التثاقلية

كان نيوتن معنيًّا في المقام الأول بتفسير حركات الكواكب الملاحظة في المجموعة الشمسية وحركة أقمارها، وأُتيح له قدر كبير من بيانات الملاحظات، وكانت الحقائق الأكثر أهميةً في نظره هي ما يلي:

(أ) أقمار المشتري تتحرك في مدارات دائرية أساسًا حول المشتري بأزمان دورية تتناسب مع أبعادها عند مركز المشتري مرفوعة للأس $3/2$. (يُعرف الزمن الدوري بأنه الزمن اللازم لكي يُتم القمر دورة كاملة حول المشتري. إذا أخذنا $t = 0$ عند اللحظة التي يكون فيها المتجه من مركز المشتري إلى القمر مشيرًا إلى اتجاه خاص بالنسبة إلى خلفية النجوم الثابتة، فإن الزمن الدوري T يكون الزمن المنقضي إلى أن يشير هذا المتجه مرة ثانية إلى نفس الاتجاه. لاحظ الدور المهم للنجوم الثابتة في إمدادنا بتعريف فيزيائي لفئة من المحاور غير الدوارة.)

(ب) الأمر نفسه صحيح لأقمار زحل.

(ج) الكواكب تتحرك في مدارات إهليلجية تكون الشمس في بؤرتها.

(د) متجه نصف القطر من الشمس إلى أي كوكب يمسح مساحات متساوية في أزمنة متساوية؛ أي إن معدل مسح المساحة ثابت.

(هـ) الأزمنة الدورية للكواكب، منسوبة لخلفية النجوم الثابتة، تتناسب مع متوسط أبعادها عن الشمس مرفوعًا إلى الأس $3/2$. (البُعد «المتوسط» المشار إليه هنا هو متوسط أقرب وأبعد مسافتين يبعدهما الكوكب عن الشمس، ويساوي نصف المحور الأكبر للقطع الناقص.)

استنتج يوهانز كبلر (١٥٧١–١٦٣٠) الحقائق (ج) و(د) و(هـ) المعروفة على التوالي بقوانين كبلر الأول والثاني والثالث، وذلك من بيانات قدر كبير من الملاحظات.

من (د) أوضح نيوتن أن القوة المؤثرة على الكواكب تتجه نحو الشمس؛ أي إنها قوة مركزية. الاستنتاج الرياضي لهذه النتيجة سوف نقدِّمه في الفصل الثامن (انظر قسم [كمية التحرك الزاوية والقوة المركزية]). عند هذه النقطة نؤكد على أن (د) يدلنا على اتجاه القوة المؤثرة على الكواكب، ولكنه لا يقول شيئًا عن مقدار تلك القوة. واستنتج نيوتن من (ج) و(هـ) أن مقدار القوة المؤثرة على كوكبٍ ما يتناسب عكسيًّا مع مربع المسافة بين الكوكب والشمس، وطرديًّا مع قوة كتلة الكوكب.

بدلًا من البحث في رياضيات صعبة نوعًا ما وضرورية لوصف كوكب متحرك في مدار إهليلجي، دعنا نركِّز على أقمار المشتري (الذي يتخذ مدارات دائرية). يتحرك قمر كتلته m في دائرة نصف قطرها R بسرعة مقدارها ثابت v وعجلة v^2/R متجهة نحو مركز الدائرة؛ لهذا توصَّل نيوتن إلى أن قوةً مقدارها:

$$F = \frac{mv^2}{R} \tag{3-30}$$

يجب أن تجذب القمر نحو مركز المشتري. وفيما يتعلق «بالسبب» التفصيلي لتلك القوة فقد أفسح نيوتن مجالًا لبعض التحيُّر، لكنه اعتبر بوضوح أن القوة مبذولة بطريقةٍ ما بواسطة المشتري ذاته.

الزمن الدوري للقمر؛ أي الزمن اللازم لكي يدور دورة واحدة، هو:

$$T = \frac{2\pi R}{v}. \tag{3-31}$$

وبهذا نستطيع إعادة كتابة المعادلة (3-30) على الصورة:

$$F = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}. \qquad (3\text{–}32)$$

وحيث إن T تتناسب مع $R^{3/2}$ (طبقًا لـ (أ))، فإنه يمكننا أن نكتب:

$$T^2 = kR^3. \qquad (3\text{–}33)$$

معنى النتيجة الملاحَظة (أ) أن ثابت التناسب k يكون له نفس القيمة لكل الأقمار؛ أي إن k لا يعتمد على كتلة القمر m.

بإدخال المعادلة (3-33) في المعادلة (3-32) وَجد نيوتن أن:

$$F = 4\pi^2 \frac{m}{kR^2} \qquad (3\text{–}34)$$

أو، بالكلمات:

> القوة التي يؤثر بها المشتري على قمرٍ كتلته m يبعد مسافة R عن مركز المشتري تتناسب مع m/R^2 وتتجه نحو مركز المشتري.

وطبقًا لقانون نيوتن الثالث، يؤثِّر القمر بقوة على المشتري. هذه القوة تتناسب مع M/R^2؛ حيث M هي كتلة المشتري. بما أن القوة التي يؤثِّر بها القمر على المشتري يجب أن تكون مساوية في المقدار (ومضادة في الاتجاه) للقوة التي يؤثِّر بها المشتري على القمر، فإننا نرى أن القوة يجب أن تتناسب مع حاصل Mm (أي إن الثابت $4\pi^2/k$ في المعادلة (3-34) يتناسب مع M)؛ وبناءً على ذلك يكون قانون القوة بين المشتري (كتلة M) والقمر (كتلة m) على بُعد R من مركز المشتري هو:

$$F = G\frac{mM}{R^2}, \qquad (3\text{–}35)$$

حيث G ثابت (يسمى ثابت الجاذبية) لا يعتمد على m أو M.

من الواضح جليًّا أن هناك قوة جاذبة، أيضًا على صورة المعادلة (3-35)، بين زحل وكلٍّ من أقماره. فضلًا عن ذلك، أوضح نيوتن أن قانونًا للقوة، بنفس هذه الصورة بين الشمس وكلٍّ من كواكبها، ضروريٌّ (وكافٍ) لتفسير قوانين كبلر. ومن المفترض

احتمالًا أن تؤثِّر الأرض بقوة مماثلة على قمرها الخاص. وعلى ما يبدو بوضوح من غايتنا المتاحة حاليًّا، كان مطلوبًا من نيوتن وثبة خيالية معتبرة ليعرف أن هذه القوة تتشابه في نوعها مع القوة التي تجذب بها الأرض تفاحة ساقطة من فرع شجرة. وقد تحقَّق أيضًا من أن هذه الفكرة يمكن اختبار صحتها عدديًّا. وكان أحسن مَن عبَّر عن عبقرية نيوتن في هذا الخصوص هو العالم الموسوعي الفرنسي بول فاليري: «على المرء أن يكون نيوتن آخَر ليرى أن القمر يسقط بينما العالم كله يرى أنه لا يسقط.»[4]

إذا رمزنا لكتلة الأرض بالرمز M_e، فإن القوة التي تبذلها الأرض على كتلة m تبعد مسافة R عن مركز الأرض تكون GmM_e/R^2، وتكون عجلة الكتلة m نحو مركز الأرض هي GM_e/R^2 (لاحظ أن مقدار العجلة لا يعتمد على m)؛ بناءً على ذلك، عندما نقارن عجلة القمر a_{moon} نحو الأرض مع العجلة g لتفاحة ساقطة عند سطح الأرض، يجب أن تكون العجلتان بنسبة $(R_e/R_m)^2$؛ حيث R_e هو بُعد التفاحة عن مركز الأرض (أي إن R_e هو نصف قطر الأرض)، وR_m هو بُعد القمر عن مركز الأرض. لقد علم نيوتن، في حدود جيدة للدقة، أن $R_e/R_m = 1/60$؛ وبهذا يكون $(R_e/R_m)^2 = 0.0002777$. عجلة القمر هي v^2/R_m، وسرعة القمر v هي $2\pi R_m/T$؛ حيث T الزمن الدوري لحركة القمر حول الأرض. بإدخال $T = 27.3$ يومًا و$R_m = 3.844 \times 10^8$ أمتار،[5] نحصل على $v = 1023.97\,\text{m/s}$ و$v^2/R_m = 0.002728\,\text{m/s}$، ونصل إلى أن $a_{\text{moon}}/g = 0.002728/9.8 = 0.0002783$. لقد أجرى نيوتن هذا الحساب ووجده مقنعًا بدون شك عندما قرَنه بإثبات آخَر لقانون تربيع القوة العكسي.

كان نيوتن مؤمنًا ببساطةِ وعالميةِ قوانين الطبيعة، وما دام قد انتهى إلى أن هناك قوة جاذبة موجودة بين المشتري وأقماره، وبين زحل وأقماره، وبين الأرض وقمرها، وبين الشمس والكواكب، فإنه افترض أن هناك قوة جذب مماثلة (سمَّاها الجاذبية) موجودة بين أي جسمين. وأوضح أننا في ممارساتنا اليومية لا ندرك قوة التجاذب بين جسمين لأن القوة الجاذبة المتبادلة بينهما صغيرة للغاية مقارنةً بقوة الجاذبية التي تؤثِّر بها الأرض عليهما. وافترض أن أي جسمين (جسمين صغيرين جدًّا) يتجاذبان بقوة مقدارها:

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{3-36}$$

تتجه من أحد الجسيمين إلى الآخر. في هذه المعادلة، m وM هما كتلتا الجسيمين، وr المسافة بينهما.

السؤال الذي ينشأ على الفور هو: ما هي القوة التي تؤثِّر بها كتلة كُروية كبيرة (مثل الأرض) على جسيمٍ ما؟ إذا كانت المسافة بين الجسيم ومركز الأرض كبيرة بالمقارنة مع نصف قطر الكرة، فسوف يكون هناك خطأ يمكن إهماله في استخدام المعادلة (3-36)، باعتبار أن r هي المسافة من مركز الكرة إلى الجسيم. لقد رأينا للتوِّ أن هناك إثباتًا قويًّا لصحة المعادلة (3-36) حتى عندما تكون المسافة بين الجسيم ومركز الكرة غير كبيرة مقارنةً بنصف قطر الكرة (على سبيل المثال، اعتبر جسيمًا مثل تفاحة نيوتن وكرةً مثل الأرض)، مع اعتبار r هي المسافة بين مركز الكرة والجسيم.

أدرك نيوتن أنه إذا اعتبر المعادلة (3-36) بمنزلة قانون القوة الأساسي بين جسيمات، فإنه يكون من الممكن حساب القوة بين جسيم وتوزيع كتلة كروية، باعتبار التوزيع مؤلَّفًا من عناصر صغيرة عديدة (كلٌّ منها يؤثر على الجسيم بقوة تعطى بالمعادلة (3-36))؛ وجمْع القوى التي تؤثر بها هذه العناصر على الجسيم. وتمنَّى لو يستطيع بيان أنه إذا كان الجسيم خارج توزيع الكتلة الكروية، تكون القوة هي نفسها كما لو كان توزيع الكتلة بأكمله قد تمَّ استبداله بكتلة نقطية (لا نفس الكتلة الكلية) عند مركز الكرة. ويعتقد كثيرون أنه أرجأ نشر كتابه «المبادئ» عشرين سنة حتى أصبح لديه برهان مُرضٍ لهذه المسألة.

البرهان الوارد في كتاب «المبادئ» هندسيٌّ. وقد حذفنا البرهان هنا، لكن الطالب المُلم بحساب التفاضل والتكامل ينبغي أن يكون قادرًا على إجراء الحساب. الفكرة هي أن تحلل توزيع الكتلة إلى عناصر صغيرة عديدة ΔM. القوة التي تؤثِّر بها ΔM على جسيم كتلته m يكون مقدارها $Gm\Delta M/r^2$؛ حيث r المسافة بين ΔM وm؛ واتجاه هذه القوة على طول الخط الواصل بين ΔM وm. نوجد القوة الكلية على m عن طريق الجمع المتجهي لجميع القوى المؤثرة على m بواسطة عناصر الكتلة ΔM (يُستخدم التكامل لإجراء عملية جمْع كل الإسهامات المتناهية في الصغر). استخدم نيوتن (الذي اخترع حساب التفاضل والتكامل، برغم أن جوتفرِد ليبنز كان أول مَن نشر براهين كاملة) برهانًا هندسيًّا بدلًا من التكامل لكيلا يُرهق قُراءه أو يربكهم. ونحن من جانبنا نؤكِّد على أن البرهان (سواءٌ أكان هندسيًّا أم بحساب التكامل) يعتمد بشدة على حقيقة أن القوة بين جسيماتٍ ما تتغير عكسيًّا مع مربع المسافة. إذا كان الأس بخلاف ٢، فلن تكون هي الحالة التي يُسفِر فيها توزيع كتلة كروية عن نفس تأثير الجاذبية الذي تسبِّبه كتلة نقطية موضوعة عند مركز الكرة.

ربما يقلق قارئ ماهر من مناقشتنا لحركة القمر حول الأرض، وحركة أقمار المشتري وزحل حول كوكبَيها. في كلٍّ من هذه الحالات استعملنا قانون نيوتن الثاني في إطار إسناد معرَّف بمحاور غير دوَّارة (بالنسبة إلى نجوم ثابتة)، ونقطة أصله تتحرك مع مركز الكوكب المعني. مثل هذه المحاور ليست إطارًا قصوريًّا لأنها متعاجلة (متسارعة) بالنسبة إلى محاور غير دوَّارة نقطة الأصل لها مثبَّتة في الشمس.

عجلة هذه المحاور غير القصورية غير قابلة للإهمال. على سبيل المثال، عجلة الأرض في حركتها الدائرية تقريبًا حول الشمس أكبر من ضعف عجلة القمر بالنسبة إلى الأرض (يمكن للقارئ التحقق باستخدام النسبة المعروفة لبُعدَي الأرض عن الشمس والقمر، ونسبة الشهر إلى السنة). ومع ذلك فإن المناقشة ليست صحيحة؛ لأنه عندما طبقنا قانون نيوتن الثاني ($\vec{F} = m\vec{a}$) على القمر، كانت القوة الوحيدة التي اعتبرناها هي قوة الجاذبية التي تؤثر بها الأرض على القمر. وحذفنا اعتبار قوة الجاذبية التي تؤثر بها الشمس على القمر. ولدرجة عالية من الدقة، تؤثر الشمس بنفس القوة لوحدة الكُتل على القمر وعلى الأرض؛ لأن المسافة بين الأرض والقمر صغيرة جدًّا مقارنةً بالمسافة بين الأرض والشمس؛ لهذا فإن الشمس تُسبب نفس عجلة كلٍّ من الأرض والقمر، والعجلة النسبية لهما تُعزى فقط إلى قوَّتَي الجاذبية المتبادلة بين الأرض والقمر. تطبق ملاحظات مماثلة على المشتري وأقماره وعلى زحل وأقماره.

يصعب القياس المباشر لثابت التناسب G في معادلة قانون القوة (3–36) لأن قوة الجاذبية صغيرة جدًّا بالنسبة إلى قيم الكتل والمسافات التي يسهل الحصول عليها تجريبيًّا. كان كافندش في عام ١٧٩٨ هو أول من حصل على تحديد دقيق للثابت G بالقياس المباشر للقوة بين كتلتين معلومتين تفصلهما مسافة معلومة.[6] القيمة المقبولة اليوم هي $G = 6.67384 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} = 6.67384 \times 10^{-11}\,\mathrm{N-m^2/kg^2}$.[7]
وحيث إن العجلة g لجسم يسقط سقوطًا حرًّا عند سطح الأرض تعطى بالمعادلة:

$$g = G\frac{M_e}{R_e^2} \tag{3–37}$$

فإننا نستطيع حساب كتلة الأرض M_e من قيم معلومة لكلٍّ من g وG وR_e، فيكون $M_e = 5.97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

استطاع نيوتن، قبل كافندش بقرن من الزمان، أن يقدِّم تقديرًا معقولًا للثابت G، بتخمين الكثافة المتوسطة للأرض على أنها بين خمسة وستة أضعاف كثافة الماء

(«من المحتمل أن تكون كمية المادة الكلية للأرض أكبر منها خمسة أو ستة أضعاف إذا كانت كلها مكوَّنة من ماء.»).[8] من قيمة الكثافة المفترضة وقيمة R_e المعلومة، حسب نيوتن M_e، ثم G. في حقيقة الأمر، كان تخمين نيوتن جيدًا بدرجة لافتة للنظر. الكثافة الحقيقية للأرض هي ضعف كثافة الماء ٥٫٥ مرات!

مثال ٣-١٤ (مدار قمر صناعي). قمر صناعي يدور حول الأرض في مسار دائري نصف قطره R. احسب الزمن الدوري T لهذا القمر.

(أ) أوجد قيمة T عندما يكون $R = 1.05R_e$ (وهو مقدار كبير لدرجة تكفي لحذف مقاومة الهواء).

(ب) أوجد نصف القطر R لمدار متزامن. المدار المتزامن، الذي يُستخدم لأقمار الاتصالات، يضع القمر في مدار دائري في مستوًى يشمل خط الاستواء، على ارتفاع يجعله دائمًا فوق نفس النقطة على الأرض مباشرةً.

القوة المؤثرة على القمر، والمتجهة نحو مركز الأرض، هي GmM_e/R^2. وعجلة القمر هي v^2/R، وتتجه نحو مركز الأرض. فيكون $GmM_e/R^2 = mv^2/R$. بإدخال $v = 2\pi R/T$ نجد أن:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{R^3}{GM_e}. \tag{3-38}$$

حتى لو لم نعلم قيمتَي G وM_e فإننا نستطيع تعيين الطرف الأيمن للمعادلة (3-38) باستخدام المعادلة (3-37). نعيد كتابة المعادلة (3-38) على الصورة:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2 R_e}{g}\right) \cdot \left(\frac{R}{R_e}\right)^3. \tag{3-39}$$

بإدخال $R_e = 6.3781 \times 10^6\,\text{m}$ و$g = 9.81\,\text{m/s}^2$ نحصل على:

$$T = (84.44 \text{ minutes}) \left(\frac{R}{R_e}\right)^{3/2}. \tag{3-40}$$

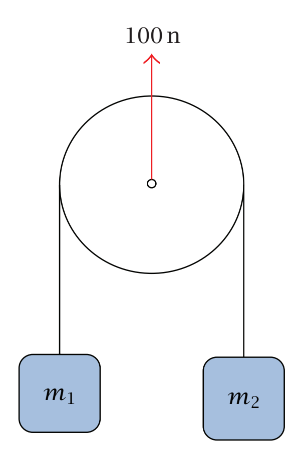
إذا كان $R/R_e = 1.05$، نجد أن $T = 91$ دقيقة. وبالنسبة إلى مدار متزامن نجد أن $T = 23.9$ ساعة[9] (الزمن الدوري لدوران الأرض بالنسبة إلى النجوم البعيدة مختلف،

ويُعرف باليوم الشمسي)؛ وبهذا نجد أن $(R/R_e)^{3/2} = 16.97$ و$R/R_e = 6.60$ على الطالب أن يحسب مقدار السرعة (بالأمتار لكل ثانية) لقمر صناعي في كلٍّ من هذين المدارين.

(٣) مسائل قانون نيوتن الثاني للحركة

المسألة ٣-١. قالبان كُتلتاهما $m_1 = 5.00\,\text{kg}$ و$m_2 = 2.00\,\text{kg}$ معلَّقان من بكرة لا وزن لها كما هو موضح في شكل ٣-١٥. يتسارع النظام إلى أعلى بتأثير قوة $F_0 = 100\,\text{n}$ عند محور البكرة. أوجد:

(أ) عجلة كل قالب مَقيسة بواسطة راصد ساكن.
(ب) الشد في الوتر.



شكل ٣-١٥: المسألة ٣-١.

المسألة ٣-٢. مصعد متسارع إلى أعلى بعجلة $\vec{A}$، قذف زنبرك مضغوط على أرضية المصعد بكُرةٍ إلى أعلى بسرعة v_0 بالنسبة إلى الأرضية. احسب أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة فوق الأرضية.

المسألة ٣-٣. وُضع لوح كتلته $30.0\,\mathrm{kg}$ على بركة مغطاة بالجليد. معامِلَا الاحتكاك الاستاتيكي والحركي بين اللوح والجليد هما 0.200 و0.100 على التوالي. في البداية يكون اللوح ساكنًا ويجري عليه صبيٌّ كتلته $50.0\,\mathrm{kg}$ بعجلة a بالنسبة إلى اللوح.

(أ) ما أقل قيمة للعجلة a سوف تجعل اللوح ينزلق؟
(ب) إذا كانت عجلة الصبي بالنسبة إلى اللوح $4.00\,\mathrm{m/s^2}$، فما هي عجلته بالنسبة إلى الجليد؟

المسألة ٣-٤. وتد (إسفين) قائم الزاوية (كتلته M) يستقر على سطح أفقي، ويصنع الوجه القطري للوتد الذي طوله D زاوية θ مع الأرض. كل أسطح الوتد ملساء. وُضِعَ قالب كتلته m، وحجمه مهمل في البداية عند الطرف العلوي للقطر، وكان كلٌّ من الوتد والقالب في وضع السكون، ثم انزلق القالب لأسفل الوتد وارتدَّ:

(أ) ما بُعد الوتد عن وضعه الابتدائي عندما يرتطم القالب بالأرض؟
(ب) كم يستغرق القالب من الزمن لينزلق لأسفل الوتد؟ (سؤال أصعب.)

المسألة ٣-٥. صندوق مستطيل مغلق ينزلق لأسفل مستوى مائل أملس يصنع زاوية θ مع الأفقي. علقت كتلة نقطية m بواسطة وتر من سقف الصندوق.

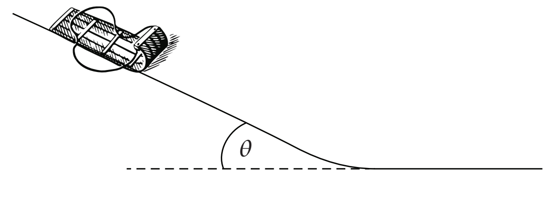
(أ) احسب الزاوية α بين الوتر والعمودي على السقف. هل الوتر معلَّق على الجانب الأسفل أم الجانب الأعلى للعمودي؟
(ب) افترض الآن أنه يوجد معامل احتكاك حركي μ بين الصندوق والمستوى. احسب α (يمكن أن يتذبذب الوتر، ولكننا نهتم بالقيمة الثابتة للزاوية α عندما ينزلق الصندوق لفترة زمنية طويلة.)

المسألة ٣-٦. يدور القرص الدوَّار لفونوغراف بمعدل ٣٣ دورة في الدقيقة. وُضعت قطعة عملة على القرص الدوَّار وتبعد أقل من ١٥ سنتيمترًا عن المركز لتدور مع القرص الدوَّار دون أن تنزلق، لكنها سوف تنزلق إذا وُضعت على بُعد أكبر من ١٥ سنتيمترًا من المركز. احسب معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين قطعة العملة والقرص الدوَّار.

المسألة ٣-٧. اكتشف كبلر أن مربعات الأزمنة الدورية للكواكب تتناسب طرديًّا مع مكعبات أنصاف أقطار مداراتها حول الشمس (بافتراض مدارات دائرية). استنتج نيوتن من هذه الحقيقة أن القوة بين الشمس وكوكبٍ ما تتناسب عكسيًّا مع مربع المسافة بينهما. افترض أن كبلر كان قد اكتشف أن مربعات الأزمنة الدورية تتناسب مع أنصاف أقطار المدارات مرفوعة إلى الأس n؛ فما هو قانون القوة الذي كان سيستنتجه نيوتن؟

المسألة ٣-٨. يهتم مثال ٥-٤ بمزلجة تنزلق إلى أسفل تلٍّ، وتستمر على حقل أفقي، بمُعامل احتكاك حركي μ بين المزلجة والثلج. في الفصل الخامس نستخدم اعتبارات الطاقة لتحليل هذا النظام، لكنك تستطيع (بل يجب عليك) أن تحلَّ مثال ٥-٤ باستخدام قانون نيوتن الثاني وكينماتيكا بسيطة. في وصفنا للتل، ذكرنا أن قاعدة التل قصيرة، وملساء، ولا احتكاكية؛ بحيث تغيِّر اتجاه سرعة المزلجة (من الاتجاه لأسفل إلى الاتجاه الأفقي) باستمرار، بدون ارتطام. قد يعتقد امرؤ ما أنه لا يوجد اختلاف (أو يوجد اختلاف طفيف جدًّا) بين ما إذا كان الجزء القصير لا احتكاكيًّا، أو كان له نفس معامل الاحتكاك الحركي μ مثل المستوى المائل والحقل. هذا غير صحيح. للتبسيط، اعتبر أن المزلجة كتلة نقطية، وأن قاعدة التل بمنزلة قوس دائرة نصف قطره R. زاوية القوس يجب أن تساوي θ (حيث θ هي الزاوية بين التل والأفقي) لكي يتغيَّر اتجاه سرعة المزلجة باستمرار. نفترض أن μ هو معامل الاحتكاك الحركي للثلج في القوس. لاحِظ أنه إذا كانت R صغيرة، فإن طول القوس ($R\theta$) يكون صغيرًا، وإذا ما أسرعت المزلجة وكانت R صغيرة، يكون من المعقول افتراض أن $v^2/R \gg g$، ويمكننا إهمال تأثير الجاذبية أثناء الفترة الزمنية التي تجتاز فيها المزلجة القوس. إذا كان مقدار سرعة المزلجة عند دخولها القوس هو v_0، ومقدار السرعة عند خروجها منه هو v_f، ينتج عن ذلك (بصورة مستقلة عن نصف القطر R، وبإهمال الجاذبية) أن $v_f = v_0 e^{-\mu\theta}$. أثبت هذا. [لاحظ أنه عندما يكون هناك جسيم ما متحرك بمقدار سرعة متغيِّر في دائرة نصف قطرها R، فإن العجلة يكون لها مركبة نصف قطرية v^2/R ومركبة مماسية dv/dt.]

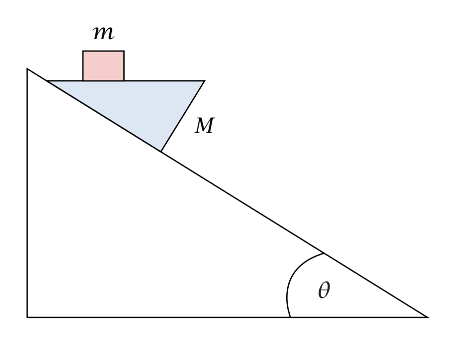
المسألة ٣-٩. سيْر ناقلة عرضه D ويتحرك بمقدار سرعة V. السير في نفس مستوى الأرضية المجاورة. يقترب من السير قرص هوكي مطاطي بسرعة $\vec{v}_0$ عمودية على حافة السير. ينزلق القرص على السير. معامل الاحتكاك الحركي بين السير والقرص هو μ.



شكل ٣-١٦: المسألة ٣-٨.

احسب أقل قيمة للسرعة v_0 بحيث تسمح للقرص بأن يصل إلى حافة السير الأخرى. قيِّم إجابتك عندما يكون $\mu = 0.200$ و$D = 3.00\,\mathrm{m}$ و$V = 6.00\,\mathrm{m/s}$.

تلميح: المسألة التي تبدو صعبة في إطار قصوري ما، يمكن أن تكون أسهل في إطار قصوري آخر.

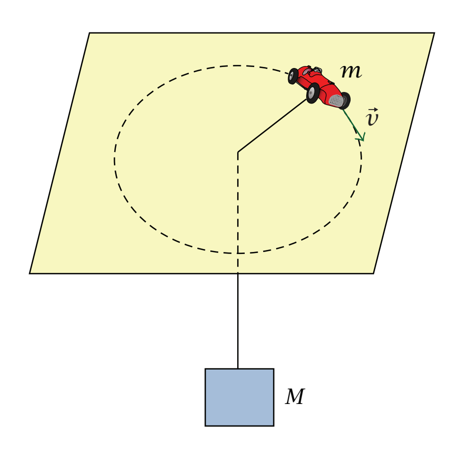


شكل ٣-١٧: مسألة ٣-١٠.

المسألة ٣-١٠. وتد كتلته M ينزلق إلى أسفل مستوى مائل يميل بزاوية θ على الأفقي، ووجهه الأعلى أفقي (أي إن الزاوية بين الوجه والمستوى المائل هي θ). أوجُه الوتد ملساء تمامًا، والقالب الذي كتلته m حرٌّ لأن ينزلق على السطح العلوي للوتد. أوجد عجلة الوتد (المستوى المائل غير قابل للحركة).

المسألة ٣-١١. سيارة أُلعوبة كتلتها m، وتستطيع الحركة بمقدار سرعة ثابت v. تتحرك في دائرة على منضدة أفقية بحيث يمدُّها وتر واحتكاك بالقوة الجاذبة المركزية. الوتر موصَّل بقالب كتلته M، معلَّق كما هو مبيَّن في شكل ٣-١٨. معامل الاحتكاك الحركي هو μ. بيِّن أن النسبة بين أقصى وأقل نصف قطر ممكن هي:

$$\frac{M+\mu m}{M-\mu m}. \tag{3-41}$$



شكل ٣-١٨: المسألة ٣-١١.

الفصل الرابع

حفظ وعدم حفظ كمية التحرك

(١) مبدأ حفظ كمية التحرك

قوانين نيوتن هي القوانين الوحيدة في الميكانيكا الكلاسيكية. وجميع «القوانين» أو المبادئ العامة الأخرى مستنتَجة من قوانين نيوتن. والفيزيائي يهتم على وجه الخصوص بالتعبيرات المتعلقة بسلوك أنظمة لا تعتمد على الطبيعة التفصيلية للقوة المعنية. وأفضل مثال معروف لمثل هذه التعبيرات هو مبدأ حفظ كمية التحرك:

> إذا لم يتعرَّض نظام ما لأي قوة خارجية، فإن كمية التحرك الكلية للنظام تبقى ثابتةً في الزمن المحدَّد.

لفهم هذا النص، علينا بالطبع أن نعرِّف أولًا «كمية التحرك». إذا كان لدينا جسيم ما كتلته m وسرعته $\vec{v}$، فإن كمية تحرُّكه (يُرمز لها عادةً بالمتجه $\vec{p}$) تُعرَّف بالمعادلة:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{4-1}$$

وتعرف كمية تحرك نظام ما من الجسيمات بحاصل جمع كميات تحرك الجسيمات المفردة:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i. \tag{4-2}$$

أثبتنا في الفصل الثالث (معادلة (3-10)) أنه لأي نظام:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right) = \frac{d\vec{P}}{dt}, \tag{4-3}$$

حيث $\vec{F}_{\text{ext}}$ القوة الكلية الخارجية المؤثرة على النظام.

لاستنتاج المعادلة (4-3) نجمع معادلات القوة لجميع جسيمات النظام؛ تتلاشى القوى الداخلية أزواجًا أزواجًا كنتيجة لقانون نيوتن الثالث.

إذا كان $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$، يكون لدينا المعادلة:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{P} = \text{constant} \tag{4-4}$$

التي تسمى مبدأ حفظ كمية التحرك.

مثال ٤-١ (تحليل تصادم تلتصق فيه الأجسام معًا). جسم كتلته 1 kg وجسم كتلته 2 kg يتصادمان على سطح أفقي أملس. قبل التصادم، كانت سرعة الجسم الأول 3 m/s في اتجاه شمال الشرق (أي °45 شرق الشمال). التصق الجسمان معًا، فتكوَّن منهما جسم كتلته 3 kg. أوجد مقدار واتجاه سرعة الجسم الذي كتلته 3 kg.

نختار اتجاه المحاور بحيث يشير المحور x إلى الشرق، والمحور y إلى الشمال، ويكون المحور z عموديًّا على السطح. نعرِّف هذا النظام بأنه نظام الجسمين. وبما أن السطح أملس فلا توجد قوة خارجية في الاتجاه x أو الاتجاه y (لاحظ أنه يوجد قوى داخلية في النظام (لأن الجسمين يؤثران أحدهما على الآخر أثناء وقت التصادم). تؤثِّر قوة الجاذبية بشدة في الاتجاه z على كل جسم، لكن القوة العمودية التي يؤثِّر بها السطح تساوي قوة الجاذبية في المقدار وتُضادها في الاتجاه؛ وبناءً على ذلك لا يوجد صافي قوة خارجية على النظام، ونستطيع تطبيق مبدأ حفظ كمية التحرك الذي ينص على أن:

$$\left(\sum m_i \vec{v}_i\right)_{\text{initial}} = \left(\sum m_i \vec{v}_i\right)_{\text{final}}. \tag{4-5}$$

لاحظ أن المعادلة (4-5) معادلة متجهة تكافئ المعادلات الثلاث:

$$\left(\sum m_i v_{i,x}\right)_{\text{initial}} = \left(\sum m_i v_{i,x}\right)_{\text{final}}, \tag{4-6a}$$

$$\left(\sum m_i v_{i,y}\right)_{\text{initial}} = \left(\sum m_i v_{i,y}\right)_{\text{final}}, \tag{4-6b}$$

$$\left(\sum m_i v_{i,z}\right)_{\text{initial}} = \left(\sum m_i v_{i,z}\right)_{\text{final}}. \tag{4-6c}$$

خطأ شائع أن تعتقد بأن المعادلة (4-5) تعني ضمنًا:

$$\left(\sum m_i v_i\right)_{\text{initial}} = \left(\sum m_i v_i\right)_{\text{final}}, \tag{4-7}$$

حيث v_i مقدار متجه السرعة $\vec{v}_i$. هذا لا ينتج من المعادلة (4-5)، وليس صحيحًا على وجه العموم.

في المثال الحالي، المعادلة (4-6c) ليست مهمة؛ فهي لا تنص إلا على أن $0 = 0$. إذا سمَّينا متجه السرعة النهائية المجهولة $\vec{V}$ ومركبتَيه V_x وV_y، فإن المعادلتين (4-6a) و(4-6b) تعنيان أن:

$$\begin{aligned} 2\,(5)\,(.707) + 0 &= 3V_x, \\ 2\,(5)\,(.707) + 1\,(3) &= 3V_y. \end{aligned} \tag{4-8}$$

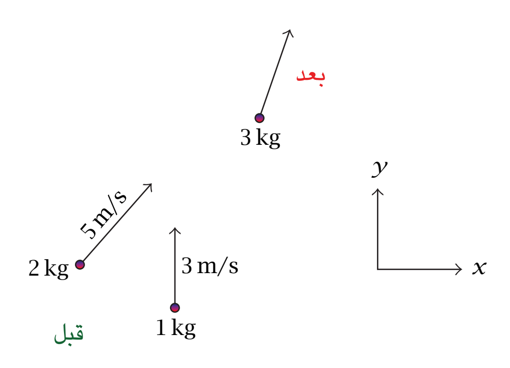
بهذا نجد أن $V_x = 2.36\,\text{m/s}$ و$V_y = 3.36\,\text{m/s}$. ويكون مقدار سرعة الجسم الذي كتلته $3\,\text{kg}$ هو $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 4.10\,\text{m/s}$. ويكون متجه السرعة V في اتجاه $55°$ شمال الشرق ($\tan^{-1} V_y/V_x = 55°$).

مثال ٤-٢ (تحليل تصادم ترتد فيه الأجسام بعيدًا). اعتبر نفس الجسمين المذكورين في المثال السابق متصادمين بنفس السرعتين الابتدائيتين، لكنهما لا يلتصقان معًا. بعد التصادم تكون سرعة الجسم الذي كتلته $2\,\text{kg}$ هي $4\,\text{m/s}$ في اتجاه $30°$ شرق الشمال. سرعة الجسم الذي كتلته $1\,\text{kg}$.

بتسمية السرعة المجهولة $\vec{V}$ نجد من المعادلتين (4-6a) و(4-6b) أن:

$$\begin{aligned} 2\,(5)\,(.707) + 0 &= 2\,(4)\,(.500) + 1V_x, \\ 2\,(5)\,(.707) + 1\,(3) &= 2\,(4)\,(.866) + 1V_y \end{aligned} \tag{4-9}$$

وبهذا يكون $V_x = 3.07\,\text{m/s}$ و$V_y = 3.14\,\text{m/s}$.



شكل ٤-١: تصادم غير مرن.

لاحظ أنه عندما يلتصق الجسمان معًا (هذه الحالة تسمى التصادم غير المرن تمامًا)، فإن مبدأ حفظ كمية التحرك هو الذي يحدِّد منفردًا السرعة النهائية. وعندما لا يلتصق الجسمان معًا لا يكون مبدأ حفظ كمية التحرك هو الذي يحدِّد منفردًا متجه السرعة النهائية. إذا عُلِم أحد متجهَي السرعة النهائية، كما في المثال الحالي، فإن المتجه الآخر يحدَّد بمبدأ حفظ كمية التحرك. وبصورة أعم، يعيَّن متجه ما في المستوى x-y بعددين (مثلًا، مركبتا المتجه، أو طول المتجه والزاوية التي يصنعها مع المحور x)؛ وبناءً عليه فإن أربعة أعداد تكون مطلوبة لتعيين متجهَي السرعة النهائية. حفظ كمية التحرك x وكمية التحرك y بفرض ضرورة تحقيق شرطين (هما المعادلتان (4-6a) و(4-6b)) بواسطة هذه الأعداد الأربعة. وعلى ذلك ستتحدد الحالة النهائية إذا عُين أي عددين من هذه الأعداد (مثلًا، اتجاها السرعتين النهائيتين). تعددية الحالات النهائية الممكنة تناظر حقيقة أن الجسمين لهما أشكال (والتلامس يمكن أن يحدث عند نقاط مختلفة على سطحيهما) ودرجات مختلفة من الصلابة (مثل كرتين من الصلب مقابل كرتَي تنس قديمتين).

نعتبر الآن صاروخًا أُطلق رأسيًّا من الأرض، وفي لحظة ارتفاعه بسرعة 100 m/s انفجر إلى ثلاث شظايا متساوية الكتلة. بعد الانفجار مباشرةً كانت سرعة إحدى الشظايا 50 m/s رأسيًّا إلى أسفل، وسرعة شظية أخرى 75 m/s في الاتجاه الأفقي. أوجد متجه سرعة الشظية الثالثة بعد الانفجار مباشرةً.

استطراد (مهم جدًّا)

معظم الطلاب سوف يحلون هذه المسألة فورًا بمساواة كمية حركة الصاروخ قبل الانفجار مباشرةً مع حاصل كميات حركة الشظايا الثلاث بعد الانفجار مباشرةً. هذا الإجراء صحيح، ولكنه يستلزم بعض المناقشة لأن النظام لا يخلو من قوى خارجية؛ فقوة الجاذبية تؤثِّر على الصاروخ وتؤثِّر أيضًا على الشظايا. كيف نبرِّر إهمال تأثير الجاذبية؟ إذا أجرينا تكامُل كلا طرفَي المعادلة (3-4) بالنسبة إلى الزمن من t_1 إلى t_2، حيث t_1 وt_2 اختياريان، نحصل على:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{ext}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{P}}{dt} dt = \vec{P}\left(t_2\right) - \vec{P}\left(t_1\right). \qquad (4\text{–}10)$$

دعنا نختَرْ t_1 ليكون الزمن قبل الانفجار مباشرةً، وt_2 الزمن بعد الانفجار مباشرةً. في هذه المسألة $\vec{F}_{\text{ext}} = -Mg\hat{k}$؛ حيث M الكتلة الكلية للنظام، و$\hat{k}$ متجه وحدة رأسيًّا إلى أعلى. عندئذٍ يصبح الجانب الأيسر للمعادلة (4-10) هو $-Mg\hat{k}(t_2 - t_1)$. يكون الانفجار «مثاليًّا» عندما يتطاير الصاروخ إلى أجزاء في زمن متناهي الصغر؛ أي $t_2 - t_1 \to 0$. في هذه الحالة يتلاشى الجانب الأيسر للمعادلة (4-10)، أو يكون مهمَلًا؛ وبهذا تكون كمية التحرك قبل الانفجار مباشرةً مساوية لكمية التحرك بعد الانفجار مباشرةً.

مثال ٤-٣ (صاروخ منفجر). اعتبر المسألة المذكورة أعلاه للتوِّ، والخاصة بصاروخ منفجر. إذا عرَّفنا $\hat{i}$ كمتجه وحدة موازٍ لسرعة الشظية المتحركة أفقيًّا، فإن حفظ كمية التحرك يستلزم أن يكون:

$$M\left(100\,\hat{k}\right) = \frac{M}{3}\left(-50\,\hat{k}\right) + \frac{M}{3}\left(75\,\hat{i}\right) + \frac{M}{3}\vec{V}, \qquad (4\text{–}11)$$

حيث $\vec{V}$ هي سرعة الشظية الثالثة؛ وبهذا نجد أن $\vec{V} = 350\,\hat{k} - 75\,\hat{i}$.

(اقتراح: ابتكر مسألة تعلم فيها الارتفاع الذي يحدث عنده الانفجار، وتعلم أيضًا مواضع النقاط التي تهبط عندها الشظايا (بالنسبة إلى النقطة التي تكون تحت الانفجار مباشرةً)، وأزمنة هبوطها (بالنسبة إلى زمن حدوث الانفجار). من هذه

المعلومات تستطيع حساب سرعة الصاروخ قبل الانفجار مباشرةً. الحل سوف يشتمل على حفظ كمية التحرك بالإضافة إلى نتائج كينماتيكية من الفصل الأول).

مثال ٤-٤ (الشد معًا على سطح لا احتكاكي). طفلان، أحدهما كتلته 30 kg والآخر كتلته 45 kg يقفان على بحيرة صغيرة متجمدة (بفرض أن الجليد أملس تمامًا). في البداية كانا ساكنين تمامًا وتفصلهما مسافة 30 m، ويمسك كلٌّ منهما بطرف حبل لا وزن له وطوله 30 m، ثم بدأ الطفلان في شد الحبل إلى أن تصادما. أين سيحدث التصادم؟ (يجب أن توضِّح طريقةُ الحل أن موقع نقطة التصادم لا يعتمد على تفاصيل كيفية شدِّهما للحبل.)

نُعرِّف نظامنا بأنه يتكوَّن من طفلين بالإضافة إلى الحبل. وحيث إنه لا توجد قوة خارجية مؤثرة على النظام، يكون لدينا:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \text{constant}, \tag{4-12}$$

حيث $m_1, m_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ هي كتل وسرعات الطفلين. وبما أن $\vec{v}_1$ و$\vec{v}_2$ في البداية يساويان صفرًا، فإن قيمة الثابت تساوي صفرًا؛ ومن ثَمَّ يكون:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right) = 0, \tag{4-13}$$

حيث $\vec{r}_1$ و$\vec{r}_2$ هما موضعا الطفلين بالنسبة إلى نقطة أصل ثابتة. إذا كان موضعا الطفلين الابتدائيان هما $\vec{r}_1(0)$ و$\vec{r}_2(0)$، وموضع حدوث تصادمهما هو $\vec{R}$، فإن:

$$\left(m_1 + m_2\right)\vec{R} = m_1\vec{r}_1\left(0\right) + m_2\vec{r}_2\left(0\right). \tag{4-14}$$

من المناسب (ولكن ليس ضروريًّا) أن نأخذ نقطة الأصل عند موضع الطفل رقم ١ بحيث يكون $\vec{r}_1(0) = 0$، ويكون:

$$\vec{R} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r}_2\left(0\right) \tag{4-15}$$

مما يعني أنه إذا كانت المسافة الابتدائية الفاصلة بين الطفلين هي D، فإن التصادم يحدث على الخط بين الموضعين الابتدائيين عند نقطة تبعد مسافة $(m_2/m_1 + m_2)D$ عن الموضع الابتدائي للطفل رقم ١. في المثال الحالي، يحدث التصادم على بُعد 18 m من الموضع الابتدائي للطفل الأقل كتلة.

(٢) مركز الكتلة

توضِّح مناقشة المثال السابق فائدة مفهوم مركز الكتلة. عمومًا، إذا كان نظامٌ ما مكوَّنًا من جسيمات مرقَّمة عدديًّا بالدليل i، وتقع عند مواضع $\vec{r}_i$، فإن موضع مركز الكتلة $\vec{R}_{\text{cm}}$ يعرَّف بالمعادلة:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}. \qquad (4\text{–}16)$$

بالكلمات، متجه الموضع لمركز الكتلة هو المتوسط الموزون لمتجهات موضع الجسيمات المفردة، وكل جسيم يوزن بنسبة كتلته إلى الكتلة الكلية.

إذا كانت $X_{\text{cm}}, Y_{\text{cm}}, Z_{\text{cm}}$ هي الإحداثيات الكارتيزية لمركز الكتلة، فإن المعادلة (4–16) تكون مكافئة للمعادلات الثلاث:

$$X_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \qquad (4\text{–}17\text{a})$$

$$Y_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \qquad (4\text{–}17\text{b})$$

$$Z_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}. \qquad (4\text{–}17\text{c})$$

إذا أعدنا كتابة المعادلة (4–16) على الصورة $M\vec{R}_{\text{cm}} = \sum m_i \vec{r}_i$؛ حيث $M = \sum m_i$، وأجرينا عملية التفاضل لكلا الجانبين بالنسبة إلى الزمن، نحصل على:

$$M\vec{V}_{\text{cm}} = \sum m_i \vec{v}_i, \qquad (4\text{–}18)$$

حيث $\vec{V}_{\text{cm}} = d\vec{R}_{\text{cm}}/dt$. بتفاضل كلا الجانبين بالنسبة إلى الزمن مرة ثانية، نحصل على:

$$M\vec{A}_{\text{cm}} = \sum m_i \vec{a}_i, \quad \text{where}$$
$$\vec{A}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{V}_{\text{cm}}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}_{\text{cm}}}{dt^2}. \qquad (4\text{–}19)$$

بضم هذه النتيجة إلى المعادلة (3-10) نحصل على النتيجة المهمة جدًّا التالية:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{A}_{\text{cm}} \qquad (4\text{–}20)$$

التي تنص على أن حركة مركز كتلة نظام ما تماثل حركة جسيم كتلته M (حيث M الكتلة الكلية للنظام) يتعرَّض لقوة $\vec{F}_{\text{ext}}$ (حيث $\vec{F}_{\text{ext}}$ هي القوة الخارجية الكلية المؤثِّرة على النظام)؛ ولهذا، إذا ألقيتَ كرسيًّا في الهواء بأي قدر من اللفِّ، فإن مركز الكتلة (يُختصر بوجه عام إلى CM) للكرسي سوف يتحرَّك (نهمل هنا احتكاك الهواء) في شكل قطع زائد.

القوة الخارجية في مثال ٤-٤ تساوي صفرًا؛ ومن ثَمَّ $\vec{A}_{\text{cm}} = 0$ و$\vec{V}_{\text{cm}} =$ ثابت. وبما أنه في البداية $\vec{V}_{\text{cm}} = 0$، فإنه ينتج أن $\vec{V}_{\text{cm}} = 0$ دائمًا، و$\vec{R}_{\text{cm}}$ قيمة ثابتة. وعلى ذلك فإن مركز الكتلة لا يتحرك أبدًا، ويجب أن يحدث التصادم عند مركز كتلة الموضعين الابتدائيين.

كثيرًا ما يهتم امرؤ ما بحركة جسم جاسئ محدود الحجم (أي ليس متناهيًا في الصغر). وغالبًا ما يكون موضع مركز الكتلة واضحًا من اعتبارات التماثل (على سبيل المثال، مركز كتلة قضيب منتظم يقع عند النقطة الوسطى). لكن في حالات أخرى يكون بعض الحساب ضروريًّا. نموذجيًّا، نجزِّئ مفاهيميًّا عمليات الجمع في المعادلات (4-17a) و(4-17b) و(4-17c) بواسطة حساب التكامل. كمثال، دعنا نحسب موضع مركز الكتلة CM لنصف كرة جاسئة كثافتها منتظمة للتبسيط. نأخذ المحورين x وy في الوجه المسطح، ونقطة الأصل عند مركز ذلك الوجه. نرى من اعتبارات التماثل البسيطة أن مركز الكتلة يقع على المحور z؛ أي إن $X_{\text{cm}} = Y_{\text{cm}} = 0$. لحساب Z_{cm}، علينا أن نحوِّل المجموع في المعادلة (4-17c) إلى تكاملات، ويمكن عمل ذلك ببساطة بإحدى طريقتين؛ في الطريقة الأولى نقسِّم الجسم إلى شرائح رقيقة بواسطة مستويات عمودية على المحور z. مستوى z الثابت يقطع نصف الكرة في دائرة نصف قطرها $\sqrt{a^2 - z^2}$؛ حيث a نصف قطر نصف الكرة؛ بهذا نجد أن حجم الشريحة المحتواة بين المستوى على ارتفاع z والمستوى على ارتفاع $z + dz$ هو $\pi(a^2 - z^2)dz$، وكتلة هذه

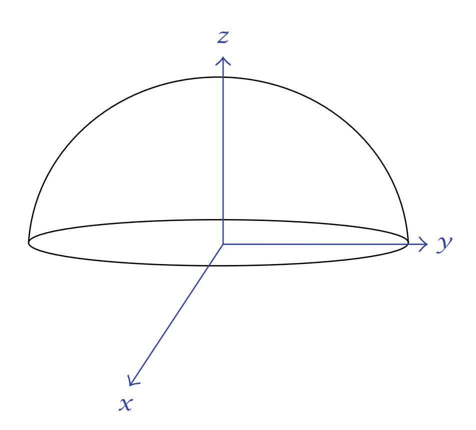
الشريحة هي $\rho\pi(a^2 - z^2)dz$؛ حيث ρ كثافة الكتلة (كتلة وحدة الحجم). بتحويل الجموع في المعادلة (4-17c) إلى تكاملات، نجد أن:

$$z_{\text{cm}} = \frac{\rho\pi\int_0^a dz\, z\,(a^2 - z^2)}{\rho\pi\int_0^a dz\,(a^2 - z^2)} = \frac{3}{8}a. \qquad (4\text{–}21)$$

بدلًا من ذلك، نستطيع أن نقسِّم الجسم إلى عناصر حجم معرَّفة بأسطح الإحداثيات الطبيعية في إحداثيات كروية الحجم. وحجم العنصر هو $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$. باستخدام $z = r\cos\theta$، نجد أن:

$$z_{\text{cm}} = \frac{\rho\int_0^a dr\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{2\pi} d\phi r^3 \cos\theta\sin\theta}{\rho\int_0^a dr\int_0^{\pi/2} d\theta\int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin\theta} = \frac{3}{8}a \qquad (4\text{–}22)$$

بما يتفق مع الحساب السابق. لاحظ أن الإجابة معقولة؛ ونتوقع أن يكون $z_{\text{cm}} < a/2$؛ حيث إن أكثر من نصف الكتلة موجود تحت المستوى $z = a/2$.



ملحوظة. يمكنك، إذا كنت مهتمًّا، أن تحسب موضع مركز الكتلة لأجسام متنوعة، لهرم على سبيل المثال. هذا تمرين في حساب التفاضل والتكامل أكثر منه في الفيزياء.

إذا تحرَّك نصف الكرة الجاسئة إلى موضع مختلف، أو أُمِيلَ، فإن مركز الكتلة يستمر ليكون نفس النقطة الفيزيائية للجسم. وبصورة أعم، تعريف مركز الكتلة

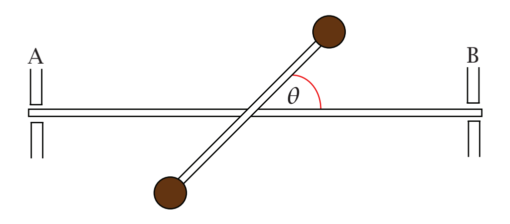
(المعادلة (4-16)) يعني ضمنًا (حذفنا البرهان وتركناه كتمرين، المسألة ٤-١، للقارئ المهتم) أن مركز كتلة جسم جاسئ يستمر في أن يكون نفس النقطة الفيزيائية للجسم حتى عندما يتغيَّر موضع الجسم واتجاهه. وبالنسبة إلى بعض الأجسام، مثل كرة مفرغة، لا يهم وضْعها عند مركز الكتلة. وبرغم ذلك، يستطيع المرء أن يتخيَّل مركز الكتلة متصلًا بالجسم عن طريق قضبان لا وزن لها.

افترض أننا قسَّمنا الجسيمات في نظام ما إلى مجموعتين (نظامين فرعيين) نسميهما ١ و٢. افترض أن الكتلتين الكليتين للنظامين الفرعيين هما M_1 وM_2، وأن مركزَي كتلتَيهما يقعان عند $\vec{R}_1$ و$\vec{R}_2$. عندئذٍ ينتج من تعريف مركز الكتلة، المعادلة (4-16)، أن مركز كتلة النظام ككل ما هو إلا مركز كتلة الكتلتين النقطيتين. تقع M_1 عند $\vec{R}_1$ وM_2 عند $\vec{R}_2$؛ وبناءً على ذلك، إذا التحم قضيبان معًا، فإن مركز كتلة النظام المركب منهما يكون تمامًا مركز كتلة الكتلتين النقطيتين اللتين تقعان عند نقطتَي منتصف القضيبين.

المعادلة (4-20) ذات فائدة عملية مهمة عندما تُطبَّق على جزء من نظام دوَّار مثل الحدَّافة. إذا كانت الحدَّافة تدور حول محور ثابت، فإن أي نقطة فيزيائية عليها تتحرك في دائرة. افترض أن مركز كتلة الحدَّافة لا يقع على المحور؛ عندئذٍ يتحرك مركز الكتلة في دائرة، وتكون له عجلة مقدارها v^2/R وتتجه نحو المركز؛ حيث v مقدار سرعة مركز الكتلة وR بُعد مركز الكتلة عن المركز. إذا كانت الحدَّافة تدور n دورة في الثانية (يُطلَق على n التردد)، فإن $v = 2\pi Rn$ و$v^2/R = 4\pi^2n^2R$. إذا كانت كتلة الحدَّافة M، فإن المعادلة (4-20) تنص على أن قوة خارجية مقدارها $4\pi^2n^2RM$ يجب تطبيقها على الحدَّافة. هذه القوة يبذلها محور التحميل وتتجه قطريًّا إلى الداخل، بطول الاتجاه اللحظي من مركز الكتلة إلى المحور. تؤثِّر الحدَّافة على محور التحميل بقوة مساوية في المقدار ومضادة في الاتجاه، ترهق أجزاء التحميل أو تجعلها تتذبذب، أو تسبِّب الأثرَين معًا. على سبيل المثال، إذا كانت كتلة الحدَّافة 145 kg وتدور ٦٠٠٠ دورة كل دقيقة ($n = 100$)، وإذا كان مركز الكتلة يبعد ٣٫١٧٥ مليمترات (١/ ٨ بوصة) عن المحور، فإن مقدار هذه القوة الدوارة بسرعة هو ١٨٢٠٠٠ نيوتن، أو ٤٠٨٠٠ رطل، أو أكثر من ٢٠ طنًّا. لكي تكون $R = 0$ توصل كتلة نقطية بالحدَّافة، بحيث يؤدي اختيار مقدار الكتلة النقطية وموضعها إلى وضع مركز الكتلة على المحور. يُسمَّى هذا الإجراء الموازنة الاستاتيكية للحدَّافة.

إضافة لمالكي السيارات

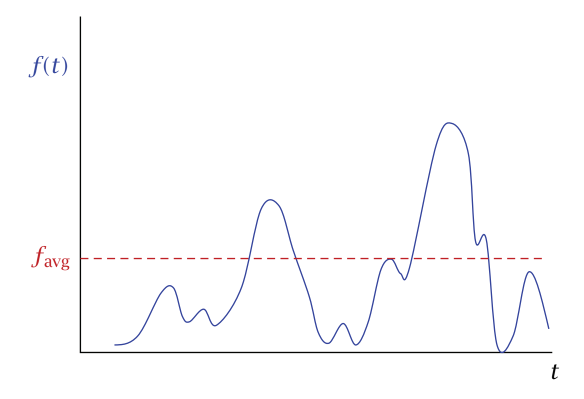
حتى بعد موازنة جسم ما استاتيكيًّا، فإنه قد يظل مؤثرًا بقوة على أعمدة التحميل. اعتبر، على سبيل المثال، النظام (شكل ٤-٢) المكوَّن من محور AB والدَّمبل الملحوم به. اللحام عند مركز كتلة الدَّمبل، لكن الزاوية θ بين الدَّمبل والمحور لا تساوي 90°. يدور الدَّمبل والمحور حول الاتجاه AB، والمحور يرتكز على عمودَي تحميل عند A وB. بما أن مركز الكتلة يقع على المحور فإنه لا يتسارع؛ ومن ثَمَّ لا يبذل عمود التحميل أي صافي قوة (إلا في حالة قوة ثابتة إلى أعلى تساوي وزن الدَّمبل والمحور). ومع ذلك فإنه في أي لحظة يؤثِّر عمود التحميل عند A وB بقوتين على المحور متأرجحتين، متساويتين في المقدار ومتضادتين في الاتجاه، فإنه يتلاشى «ميل» الدَّمبل لأنه يصطف عموديًّا على محور الدوران. تتلاشى هاتان القوتان المتأرجحتان بتأثير موازنة ديناميكية سوف نناقش نظرياتها في مقررات الميكانيكا المتوسطة.



شكل ٤-٢: دَمْبل على محور.

(٣) المتوسط الزمني للقوة

في حالات كثيرة تتغيَّر القوة المؤثرة على جسم ما سريعًا مع الزمن، وتكون الكمية محل اهتمام الفيزيائي هي مصطلح المتوسط الزمني للقوة (للاختصار نسميه القوة المتوسطة). على سبيل المثال، أثناء تصادم جزيئات غاز ما بحائط أو جدار، يبذل كل جزيء قوةً على الجدار خلال فترة زمنية قصيرة جدًّا؛ وأي جهاز ماكروسكوبي نستخدمه لقياس القوة التي تبذلها الجزيئات على الجدار سوف يكون له زمن استجابة



شكل ٤-٣: رسم بياني لقوة متغيرة تغيرًا سريعًا مع الزمن في مقابل الزمن.

طويل، مقارنةً بفترة التصادم أو الزمن بين التصادمات؛ وعلى ذلك فإن الجهاز يقيس فقط معدل القوة أو المتوسط الزمني للقوة.

افترض أن $f(t)$ دالة ما في الزمن t. نُعرف المتوسط الزمني للدالة $f(t)$ بالمعادلة:

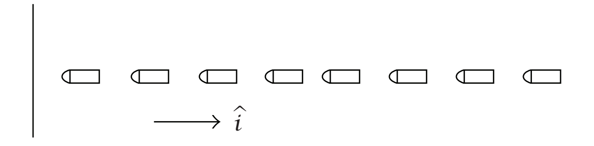
$$f_{avg} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt. \tag{4-23}$$

تعريف المتوسط هكذا يعتمد على t_1 وt_2، لكن f_{avg} في معظم الحالات التي تجذب الاهتمام لا تعتمد على t_1 وt_2، بشرط ألا يكون طول أخذ متوسط الفترة الزمنية صغيرًا للغاية. على سبيل المثال، شكل ٤-٣ عبارة عن رسم بياني للقوة المبذولة على جدار وعاء بواسطة جزيئات تتصادم مع الجدار. إذا كانت فترة أخذ المتوسط تشمل تصادمات عديدة، فإن f_{avg} لا تعتمد على طول فترة أخذ المتوسط. لاحظ أن تعريف f_{avg} يعني ضمنًا أن المساحة تحت الخط الأفقي تساوي المساحة تحت خط الرسم البياني للتراوح الفعلي للقوة مقابل الزمن.

إذا كان $\vec{F}(t)$ عبارة عن متجه يتغير مع الزمن، فإن متوسط $\vec{F}$ الزمني يُعرف بالمثل؛ أي إن:

$$\vec{F}_{avg} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt. \tag{4-24}$$

وهكذا فإن المركبة x لـ $\vec{F}_{\text{avg}}$ هي المتوسط الزمني للدالة $F_x(t)$، وبالمثل بالنسبة إلى المركبتين y وz.



شكل ٤-٤: تتابع سريع للطلقات المرتطمة بالجدار عند اليسار.

نستطيع الآن حساب المتوسط الزمني للقوة التي تبذلها الجسيمات التي تصطدم بالجدار. وبدلًا من اعتبار جزيئات غاز، لها توزيع سرعات استاتيكي، سوف نفترض أن الجسيمات هي طلقات مدفع رشاش؛ وبهذا تقترب جميعها من الحائط بنفس السرعة. ونُعرِّف هذا النظام بأنه يتكون من جميع الطلقات التي ترتطم بالحائط أثناء فترة زمنية طولها T؛ حيث تكون T كبيرة مقارنةً بالزمن بين الطلقات. من المعادلة (4-3) نحصل على:

$$\int_0^T \vec{F}_{\text{ext}} dt = \int_0^T \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{P}_{\text{final}} - \vec{P}_{\text{initial}}, \tag{4-25}$$

حيث $\vec{P}_{\text{final}}$ هي كمية التحرك لنظام عند زمن T، و$\vec{P}_{\text{initial}}$ هي كمية التحرك عند زمن 0.

إذا وصلت الطلقات إلى السكون في الحائط، فإن $\vec{P}_{\text{final}} = 0$. في البداية كانت جميع الطلقات تتحرك إلى اليسار بمقدار سرعة v (سرعة الطلقة هي $-v\hat{i}$؛ حيث i متجه وحدة يشير إلى اليمين). عدد الطلقات في نظامنا الحالي هو nT؛ حيث n عدد الطلقات التي ترتطم بالحائط كل وحدة زمنية؛ وبناءً عليه نجد أن $\vec{P}_{\text{initial}} = -nTmv\hat{i}$؛ حيث m هي كتلة الطلقة. القوة الخارجية الوحيدة المؤثرة على نظامنا هي التي يبذلها الحائط. باستخدام المعادلة (4-24) نجد أن $\vec{F}_{\text{avg}} = nmv\hat{i}$ هذه هي القوة المتوسطة التي يبذلها الجدار على طلقات الرصاص؛ والقوة المتوسطة التي تبذلها الطلقات على الجدار هي $-nmv\hat{i}$. إذا كانت طلقات الرصاص، بدلًا من أن تصل إلى السكون في

الجدار، ترتد بعيدًا عن الجدار بسرعة $v\hat{i}$، فإنه يكون لدينا $\vec{P}_{\text{final}} = nTmv\hat{i}$، وتكون القوة المؤثرة على الجدار ضعف القوة السابقة.

المثال أدناه متقدِّم قليلًا، وقد يؤثِّر في أصدقائك أو يبعدهم عنك إذا ما ناقشته في حفل ما.

مثال ٤–٥ (رمل في ساعة رملية). وُضعت ساعة رملية على ميزان. عندما كان كل الرمل في قاع الساعة الرملية، كانت قراءة المقياس W (أي إن وزن الساعة الرملية بالإضافة إلى الرمل كله يساوي W). كم ستكون القراءة أثناء هبوط الرمل خلال الساعة الرملية؟ للتحديد، نفترض أن كتلة ثابتة من الرمل كل وحدة زمن (نسميها ρ) تهبط خلال الساعة الرملية، وأن كل حبيبات الرمل تهبط نفس المسافة d (أي إننا نتجاهل تراكم الرمل).

هذا السؤال يمكن إجابته إما بتطبيق النظرية العامة، المعادلة (4–20)، على النظام المكون من الساعة الرملية والرمل، أو بفحص تفصيلي لما يحدث في الساعة الرملية. كلتا الطريقتين تعليميتان.

دعنا نأخذ المحور z متجهًا رأسيًّا إلى أعلى، ونأخذ $z = 0$ عند قاع الساعة الرملية. ارتفاع مركز كتلة النظام (الساعة الرملية + الرمل) يُحدَّد بالمعادلة:

$$MZ_{\text{cm}} = \sum m_i z_i, \tag{4–26}$$

حيث M الكتلة الكلية للنظام، في أي لحظة من الزمن يمكن تحليل حاصل الجمع على اليمين إلى أربعة أجزاء:

(١) إسهام من الرمل في الغرفة العليا.
(٢) إسهام من الرمل في الغرفة السفلى.
(٣) إسهام من الرمل أثناء هبوطه.
(٤) إسهام من الساعة الرملية ذاتها.

(١) يساوي $m(t)d$؛ حيث $m(t)$ هي كتلة الرمل في الغرفة العليا عند زمن t. (٢) يتلاشى لأن $z = 0$ عند القاع. (٣) ثابت في الزمن لأن صورة التيار الهابط من الرمل تبدو هي نفسها في كل الأوقات. (٤) ثابت في الزمن بكل وضوح. بناءً على ذلك يكون

لدينا $MZ_{\text{cm}} = m(t)d + \text{constant}$، بتفاضل كلا الطرفين بالنسبة إلى الزمن وملاحظة أن $dm/dt = -\rho$ نحصل على $MdZ_{\text{cm}}/dt = -\rho d$ و$Md^2Z_{\text{cm}}/dt^2 = 0$ لأن ρ من المفترض أن تكون ثابتة. ينتج من المعادلة (4–20) أن صافي القوة الخارجية المؤثرة على النظام يساوي صفرًا. لكن القوة الخارجية هي $-Mg\hat{k} + F\hat{k}$؛ حيث $-Mg\hat{k}$ هي قوة الجاذبية التثاقلية و$F\hat{k}$ هي القوة التي يبذلها الميزان؛ وبهذا نجد أن $F = Mg = W$؛ وقراءة الميزان تكون هي نفسها سواءٌ أكان الرمل هابطًا أم لا. (في حقيقة الأمر، هناك تأثير عابر قصير في البداية والنهاية لأن صورة الرمل الساقط متغيرة.)

بعض الناس سوف يقتنعون بأن F يجب أن تكون أقل من Mg لأن الميزان لا يشعر بوزن الرمل الذي يسقط بحرية. ومع ذلك، فهناك تأثير آخر: تأثير الرمل الساقط على القاع، والذي يزيد F. التحليل السابق لمركز كتلة الحركة، الذي يتجاهل تمامًا ضرورة مناقشة هذين التأثيرين، يعني أيضًا أنهما يجب أن يتلاشيا تمامًا. يمكن أن نفهم هذا بالتفصيل. إذا كان t هو الزمن اللازم لكي تسقط حبة رمل مسافة d، فإن وزن الرمل في السقوط الحر يكون $\rho g t$. حسابات المدفع الرشاش في المثال السابق تخبرنا أن تأثير الرمل الهابط تنشأ عنه قوة إضافية ρv تؤثِّر على الميزان؛ حيث v هو مقدار سرعة حبة الرمل قبل ارتطامها بالقاع مباشرةً (وρ تشابه nm في حسابات المدفع الرشاش). بما أن $v = gt$، فإن القوة المؤثرة تُلاشي النقص في الوزن، كما هو متوقع. (في الحقيقة، هناك نقص وقتي عابر في قراءة المقياس قبل أن ترتطم حبة الرمل الأولى بالقاع، وزيادة وقتية أثناء هبوط الحبَّات الأخيرة.)

مثال ٤–٦ (نقل حَمَام في شاحنة). توقفت شاحنة كبيرة ذات مقطورة عند تقاطع، ولاحَظَ أحد المشاة أن السائق قفز خارجًا من الكابينة، وضرب بغضب على جانب المقطورة مستخدِمًا قطعة خشب غليظة، ثم قفز عائدًا إلى الكابينة. واستفسر الرجل الماشي فأجاب السائق صائحًا: «الحد الآمِن للحمل بالنسبة إلى الإطارات هو ٦٠٠٠٠ رطل. وتزن تجهيزات المقطورة ٤٠٠٠٠ رطل وهي فارغة، ولديَّ بالداخل ٤٠٠٠٠ رطل طيورًا حية من الحمام؛ لهذا عليَّ أن أُبقي نصف وزن الحمام في الهواء.»

هل ستنجح هذه الخطة؟

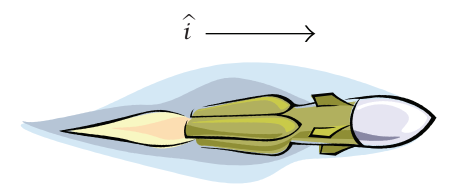
بفرض أن نظامنا مكوَّن من الشاحنة بالإضافة إلى جميع المحتويات، إذا كان $\vec{F}_{\text{avg}}$ هو المتوسط الزمني للقوة المؤثرة على النظام طوال الفترة الزمنية من $t = 0$ إلى $t = T$،

فإن $\vec{F}_{\text{avg}} = [\vec{P}(T) - \vec{P}(0)]/T$؛ حيث $\vec{P}(T)$ و$\vec{P}(0)$ هما كمية التحرك للنظام عند هذين الزمنين. إذا افترضنا (ليس ضروريًّا حقيقةً، ولكن لتبسيط المناقشة) أن هناك حدًّا أعلى لمقدار السرعة التي يمكن أن يطير بها الحمام، فإن مقدارَي $\vec{P}(T)$ و$\vec{P}(0)$ يكونان محدَّدين. وبناءً عليه، إذا جعلنا أخذ المتوسط لفترة زمنية T طويلًا بدرجة كافية، فإننا نحصل على $\vec{F}_{\text{avg}} = 0$. وعلى وجه الخصوص، متوسط المقدار N للقوة المتجهة لأعلى، والتي يبذلها الطريق على الإطارات يجب أن تساوي W؛ قوة الجاذبية التثاقلية المؤثرة على الشاحنة وكل محتوياتها.

كما في المثال السابق، الخلاصة التي توصَّلنا إليها ليست مبنية على تحليل تفصيلي للقوى «الداخلية» في النظام. ومع ذلك، إذا رغب أحد في معرفة السبب في أن وزن الحمام الموجود في الهواء لم يخفِّف الحمل على الإطارات، فإن الإجابة تكمن في أن رفرفة أجنحة الحمام تزيد من الضغط الذي يبذله الهواء على أرضية الشاحنة. لاحظ أن تحليلنا يفترض أن الشاحنة مغلقة بحيث تكون كل القوى المتعلقة بالديناميكا الهوائية هي قوى داخلية في نظامنا. إذا كانت المقطورة مغلقة بسياج من أسلاك قفص الطيور فقط، فإن بعض القوى الديناميكية الهوائية تنتقل إلى أجزاء مجاورة من الطريق. يجب أن يكون واضحًا أنه، في هذه الحالة، إذا كانت جدران المقطورة عالية بقدر كافٍ، فإن استراتيجية السائق قد تنجح.

مثال ٤-٧ (علم الصواريخ). اعتبر صاروخًا في الفضاء الخارجي (حيث لا توجد جاذبية). في البداية يكون الصاروخ ساكنًا، وكتلته بالإضافة إلى كل وقوده تساوي M_0. أثناء احتراق الوقود، يندفع في اتجاه المؤخرة بمقدار سرعة ثابت u بالنسبة إلى الصاروخ. يناظر ذلك تمامًا حالة امرأة مسلَّحَة بمدفع رشاش وهي تجلس على مزلجة فوق جليد أملس، وما إن تُطلِق المدفع في اتجاه المؤخرة، فإن الارتداد يُعجِّل المزلجة. ما هي سرعة الصاروخ في اللحظة التي تكون عندها كتلة الصاروخ والوقود المتبقي مساوية لـ M؟ (هذه العلاقة لا تعتمد على أي فروض بشأن معدل الاحتراق الذي لا يكون بالضرورة ثابتًا. إذا أُخذت الجاذبية في الاعتبار فإن برنامج الاحتراق يكون مهمًّا.)

لنعتبر نظامنا هو الصاروخ بالإضافة إلى كل الوقود الموجود على متنه في أي لحظة معينة. لتكن كتلة النظام هي M، وسرعة الصاروخ في هذه اللحظة هي $v\hat{i}$؛ حيث $\hat{i}$ متجه وحدة يشير في اتجاه حركة الصاروخ. نبحث نفس النظام (أي نفس



شكل ٤-٥: صاروخ يطير في فضاء سحيق.

تجمُّع الجسيمات) في لحظة متأخرة قليلًا. عند هذا الزمن تكون كتلة الصاروخ والوقود الموجود على متنه هي $M + dM$ (لاحظ أن dM كمية سالبة) وسرعة الصاروخ هي $(v + dv)\hat{i}$. بعض جسيمات نظامنا لا تزال على متن الصاروخ؛ في الحقيقة هناك كتلة $-dM$ من الوقود قد قُذِفت من الصاروخ بسرعة $(v - u)\hat{i}$ بالنسبة إلى راصد قصوري. القوة المبذولة على غرفة الاحتراق بواسطة وقود الاحتراق وردود الأفعال لتلك القوى هي جميعها قوى داخلية في نظامنا؛ وبناءً على ذلك، ليس هناك قوى خارجية مؤثِّرة على النظام، كما أن كمية التحرك الكلية للنظام عند اللحظة الابتدائية يجب أن تساوي كمية التحرك الكلية عند لحظة متأخرة قليلًا. ومن ثَمَّ نجد أن:

$$Mv\hat{i} = (M + dM)(v + dv)\hat{i} - dM(v - u)\hat{i}. \qquad (4\text{–}27)$$

بما أن اللحظتين يمكن اعتبارهما قريبتين في الزمن كما نرغب، فإن الحد المتناهي الصغر من الرتبة الثانية $dM\,dv$ يمكن إهماله مقارنةً بالحدود المتناسبة مع dM أو dv. (في الحقيقة، أهملنا بالفعل الكميات المتناهية الصغر في الحد الثاني من المعادلة أعلاه؛ لأن الجسيمات المقذوفة يمكن أن يكون لها مدى سرعات من $(v - u)\hat{i}$ إلى $(v + dv - u)\hat{i}$.) بحذف متجه الوحدة $\hat{i}$ نحصل على $M\,dv + u\,dM = 0$. بإعادة كتابة هذه المعادلة على الصورة:

$$\frac{dM}{M} + \frac{dv}{u} = 0 \qquad (4\text{–}28)$$

نجد أن $d(\ln M + v/u) = 0$ وهي تعني أن $\ln M + v/u = \text{constant}$.

إذا كانت السرعة الابتدائية (في اللحظة عندما يكون $M = M_0$) تساوي صفرًا، فإن المقدار الثابت يأخذ القيمة $\ln M_0$، ونجد أن $v = u \ln (M_0/M)$. إذا كانت السرعة الابتدائية v_0 نحصل على ما يسمى معادلة الصاروخ المثالية:

$$v = v_0 + u \ln \left(\frac{M_0}{M}\right). \tag{4-29}$$

من المفيد تعليميًّا، من وجهة نظر المهندسين، أن تُكتَب هذه المعادلة على الصورة $M_0/M = \exp[(v - v_0)/u]$. يريد المرء عادةً أن يضع كتلة معينة M_1 (تُسمَّى الكتلة المتفجرة) في مدار يتطلب أن يكون $v - v_0$ لها قيمة معينة w. في هذه الحالة يجب البدء بكتلة M_0؛ حيث $M_0/M_1 = \exp(w/u)$. افترض وجود وقودين، الثاني قيمته u أكبر مرتين من الأول؛ عندئذٍ إذا كان $M_0/M_1 = 100$ للوقود الأول، يكون لدينا $M_0/M_1 = 10$ للوقود الثاني.

(٤) مسائل كمية التحرك

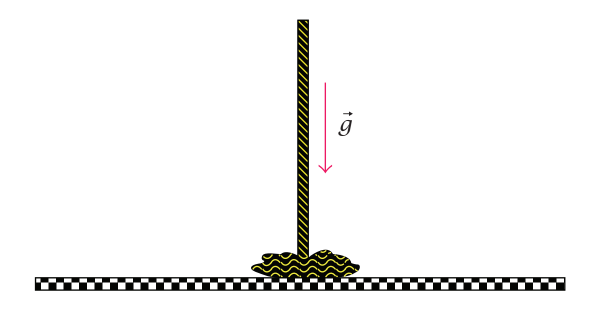
المسألة ٤-١. بيِّن أن مركز كتلة جسم جاسئ تستمر في أن تكون نفس النقطة الفيزيائية للجسم حتى إذا تغيَّر موضع الجسم واتجاهه.

المسألة ٤-٢. حبل معلَّق رأسيًّا بحيث يلمس طرفه السفلي الأرضية مباشرةً. طول الحبل L وكتلته M. حُرِّرَ الحبل. أوجد ما يلي:

(أ) القوة المؤثرة على الأرضية كدالة في المسافة التي هبطها الطرف العلوي للحبل.

(ب) أقصى قوة تؤثِّر على الأرضية، واللحظة الزمنية لحدوثها بعد تحرير الحبل.

المسألة ٤-٣. أُطلِق صاروخ فضائي رأسيًّا، وعندما وصل إلى أعلى نقطة له انفجر إلى شظيتين: إحداهما هبطت على الأرض بعد ١٠ ثوانٍ من الانفجار عند نقطة تبعد ١٢٠



شكل ٤-٦: المسألة ٤-٢.

مترًا عن نقطة الانطلاق، والأخرى هبطت بعد أربع ثوانٍ من الانفجار عند نقطة تبعد ٢٤ مترًا عن نقطة الانطلاق. احسب:

(أ) الارتفاع الذي حدث عنده الانفجار.
(ب) أقصى ارتفاع تصل إليه الشظية.

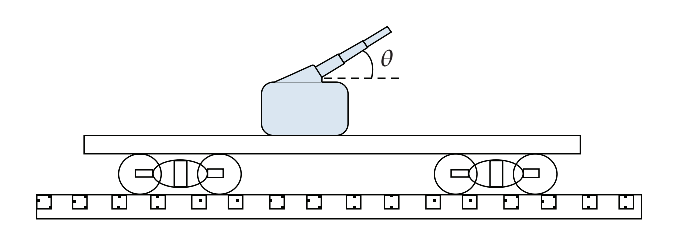
المسألة ٤-٤. (في هذه المسألة اعتبر جميع السرعات أفقية، ومحور x الموجب إلى الشرق، ومحور y الموجب إلى الشمال.)

قذيفة كتلتها $3.00\,\text{kg}$ متحركة جهة الشرق بسرعة $350\,\text{m/s}$. انفجرت إلى شظيتين: الشظية رقم ١ سرعتها $900\,\text{m/s}$ في اتجاه 20.0° جنوب الشرق، والشظية رقم ٢ سرعتها v_2 في اتجاه 40.0° شمال الشرق. احسب v_2 (لا تضع فروضًا غير مجازة بشأن كتلتَي الشظيتين).

المسألة ٤-٥. حمَلَ الصاروخ ساترن V وكتلته الكلية $2.800.000\,\text{kg}$ (انظر: http://en.wikipedia.org/wiki/Saturn_V_for_the_numbers) ملَّاحين إلى القمر. المرحلة الأولى للصاروخ رفعته إلى ٦٧ كيلومترًا، ثم أُلقِي به. الكتلة الإجمالية للمرحلة الأولى (الهيكل والوقود) على منصة الإقلاع كانت $2300000\,\text{kg}$، وكتلة الهيكل وبقية الصاروخ كانت $131000\,\text{kg}$. زمن إحراق المرحلة الأولى كان $150\,\text{sec}$، وقوة الدفع كانت $34020000\,\text{n}$. احسب السرعة (منسوبة إلى الصاروخ) التي قُذف بها وقود المرحلة الأولى والسرعة النهائية للصاروخ عند ارتفاع ٦٧ كليومترًا.

المسألة ٤-٦. يوضِّح شكل ٤-٧ مدفعًا على شاحنة مسطحة مكشوفة وموجَّهًا بزاوية θ فوق الأفقي. وُضِع المدفع والشاحنة معًا ساكنين في البداية. كتلتهما M. أُطلِقت قذيفة مدفع كتلتها m بسرعة مقدارها V بالنسبة إلى المدفع. أوجد سرعة ارتداد الشاحنة والمدفع، وبيِّن أن الزاوية α مع الأفقي التي تخرج عندها القذيفة من المدفع، تُعطى بالمعادلة:

$$\tan\alpha = \frac{M+m}{M}\tan\theta. \tag{4–30}$$



شكل ٤-٧: المسألة ٤-٦.

الفصل الخامس

الشغل والطاقة

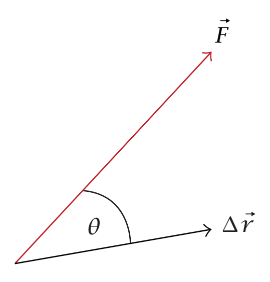
إحدى النتائج العامة المهمة لقوانين نيوتن هي نظرية الشغل والطاقة. هذه النظرية تمكِّننا، في حالات كثيرة، من إيجاد علاقة صريحة بين مقدار سرعة جسيم وموضعه في المكان. رأينا بالفعل مثالًا لهذه العلاقة في وصف السقوط الحر لجسم ما، لكن الاستنتاج في الفصل الحالي قابل للتطبيق على نطاق من الأمثلة أوسع كثيرًا.

(١) تعريف الشغل

افترض قوة $\vec{F}$ مؤثرة على جسيم يتعرَّض لإزاحة صغيرة جدًّا $\Delta\vec{r}$. يعرَّف الشغل الذي تؤثِّر به القوة (إذا لم يكن الطالب مُلمًّا بحاصل الضرب القياسي لمتجهين، فعليه أن يقرأ الملحق (أ) قبل أن يواصل.) بأنه:

$$\text{Work} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\ \left|\Delta\vec{r}\right|\ \cos\theta, \qquad (5\text{–}1)$$

حيث θ هي الزاوية بين $\vec{F}$ و$\Delta\vec{r}$. لاحظ أنه لا يوجد فرق فيما إذا أخذنا θ زاوية داخلية أو خارجية لأن $\cos\theta = \cos(360° - \theta)$. الشغل يمكن أن يكون موجبًا أو سالبًا، اعتمادًا على ما إذا كانت θ بين $0°$ و$90°$ أو بين $90°$ و$180°$؛ وبناءً عليه، إذا كنتَ تدفع صندوقًا إلى أعلى مستوى مائل، فإنك تبذل شغلًا موجبًا على الصندوق، والجاذبية تبذل شغلًا سالبًا؛ أما إذا كنت تشد الصندوق كي تمنعه من الانزلاق إلى أسفل السطح المائل، فهنا أنت تبذل شغلًا سالبًا على الصندوق، والجاذبية تبذل شغلًا موجبًا. لاحظ أنه إذا كانت $\theta = 90°$ (القوة عمودية على الإزاحة)، فإن القوة لا تبذل شغلًا؛ لهذا فإنه إذا تحرَّكَ جسيم على سطح أملس، فإن القوة العمودية التي يبذلها السطح لا تبذل شغلًا على الجسيم.



شكل ٥-١: حساب الشغل.

تعريف الشغل (المعادلة (5-1)) يمكن استخدامه حتى لو لم تكن الإزاحة صغيرة جدًّا، بشرط ألا تتغيَّر القوة $\vec{F}$ أثناء الإزاحة. إذا تغيَّرت $\vec{F}$ فإن التعريف (معادلة (5-1)) يكون ملتبِسًا. (ما قيمة $\vec{F}$ التي نستخدمها؟) والتعريف «الطبيعي» المفيد والوحيد هو ما يلي:

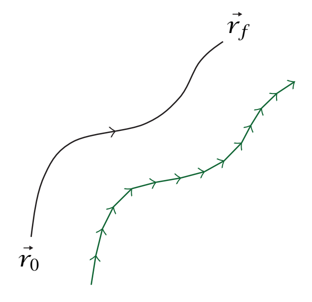
افترض أن جسيمًا ما تعرَّضَ لإزاحة، ليست بالضرورة صغيرة، من موضع ابتدائي $\vec{r}_o$ إلى موضع نهائي $\vec{r}_f$. نحدِّد أيضًا المسار الذي سلكه الجسيم وليس بالضرورة أن يكون خطًّا مستقيمًا. من الناحية المفاهيمية، نستطيع تقسيم المسار إلى سلسلة من الإزاحات الصغيرة جدًّا $\Delta\vec{r}_n$ كلٌّ منها خط مستقيم (انظر شكل ٥-٢). لتكن $\vec{F}_n$ هي القوة المؤثرة على الجسيم عندما يتعرَّض للإزاحة $\Delta\vec{r}_n$. الشغل المبذول على الجسيم أثناء هذه الخطوة القصيرة هو $\vec{F}_n \cdot \Delta\vec{r}_n$، والشغل الكلي المبذول على الجسيم أثناء حركته من $\vec{r}_o$ إلى $\vec{r}_f$ يعرَّف بالمعادلة:

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{n} \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{r}_n, \tag{5-2}$$

حيث ”lim“ تعني أننا مهتمون بالقيمة الحدِّيَّة أو النهاية للمجموع كلما أصبح طول الخطوات أصغر فأصغر، ويصبح عدد الحدود في المجموع أكبر فأكبر تباعًا.

الحد أو النهاية التي عرَّفناها بوضوح هي تعميم لمفهوم التكامل، وتُمثَّل عمومًا بالرمز:

$$\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{5-3}$$



شكل ٥-٢: تقسيم المسار.

الذي يشير عادةً إلى «التكامل الخطي للقوة $\vec{F}$ من $\vec{r}_o$ إلى $\vec{r}_f$.» وينتج أن:

$$W = \int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \tag{5-4}$$

قد يجد الطالب أنه من المفيد والأفضل أن يتذكر المعادلة (5-2) بدلًا من المعادلة (5-4)؛ لأن المعادلة (5-2) يمكن تصوُّرها بسهولة. واعتمادًا على طبيعة القوة $\vec{F}$، يمكن، أو لا يمكن، أن يكون للطرف الأيمن من المعادلة (5-4) نفس القيمة لكل المسارات بين نقطتين طرفيتين محدَّدتين $\vec{r}_o$ و $\vec{r}_f$. في الحالة الخاصة، حيث يكون للقوة $\vec{F}$ نفس القيمة عند جميع نقاط المسار، يكون لدينا (باستخدام خاصية التوزيع لحاصل الضرب القياسي):

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_n \vec{F}_n \cdot \Delta\vec{r}_n = \vec{F} \cdot \left(\vec{r}_f - \vec{r}_o\right). \tag{5-5}$$

مثال ٥-١ (الشغل المبذول بواسطة الجاذبية). احسب الشغل المبذول بواسطة الجاذبية على جسيم يتحرك من موضع ابتدائي $\vec{r}_o$ إلى موضع نهائي $\vec{r}_f$. من المفترض أن $\vec{r}_o$ و$\vec{r}_f$ قريبان بدرجة كافية من سطح الأرض، وكل منهما قريب من الآخر، بحيث تكون قوة الجاذبية التثاقلية ثابتة؛ أي إن $\vec{F}_{\text{grav}} = -mg\hat{k}$.

يمكننا كتابة $\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$، وكتابة نفس الشيء للموضع $\vec{r}_f$. باستخدام المعادلة (5-5) و$\hat{k}\cdot\hat{i} = 0, \hat{k}\cdot\hat{j} = 0, \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ نجد أن:

$$W_{\text{grav}} = mg\left(z_0 - z_f\right). \tag{5-6}$$

لاحظ أن الشغل الذي تبذله الجاذبية يعتمد فقط على الموضعين الابتدائي والنهائي، ولا يعتمد على مسار معين يسلكه الجسيم بين هذين الموضعين. هذا صحيح حتى عندما نعتبر تغيُّر مقدار واتجاه قوة الجاذبية التثاقلية، عندما يتحرك الجسيم خلال مسافات كبيرة. (الشغل الذي تبذله الجاذبية هو نفسه لكل المسارات بين نقطتين معينتين، ولكنه عمومًا لا يُعطى بالمعادلة (5-6)). الإشارة التي يدخل بها كلٌّ من z_0 وz_f في المعادلة (5-6) يمكن تذكُّرها بملاحظة أن الجاذبية تبذل شغلًا موجبًا على الجسيم الذي يتحرك لأسفل (تكون القوة موازية للإزاحة)، وتبذل شغلًا سالبًا على الجسيم الذي يتحرك لأعلى.

(٢) نظرية الشغل والطاقة

لنعتبر جُسيمًا كتلته m وكان موضعه $\vec{r}_0$ وسرعته $\vec{v}_0$ عند لحظة زمنية معينة t_0، وعند لحظة أخرى بعدها t_f يكون موضعه $\vec{r}_f$ وسرعته $\vec{v}_f$. ليكن W هو الشغل الكلي المبذول على الجُسيم ليتحرك من $\vec{r}_0$ إلى $\vec{r}_f$. تؤكد نظرية الشغل والطاقة على أن:

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \tag{5-7}$$

الكمية $(1/2)mv^2$ تسمى طاقة الحركة للجُسيم؛ وبهذا يمكن صياغة نظرية الشغل والحركة على النحو التالي:

الشغل المبذول على جُسيم خلال أي فترة زمنية يساوي التغير في طاقة حركته. (حيث يعرَّف التغير في كميةٍ ما بالقيمة النهائية للكمية مطروحةً منها قيمتها الابتدائية.)

لإثبات هذه النظرية نبدأ بقانون نيوتن الثاني $\vec{F} = m\vec{a}$ ونأخذ حاصل الضرب القياسي لكلا الجانبين مع متجه السرعة اللحظية $\vec{v}$، ونحصل على:

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m\vec{a} \cdot \vec{v}. \tag{5-8}$$

باستخدام $d/dt(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot d\vec{B}/dt + \vec{B} \cdot d\vec{A}/dt$ (انظر ملحق (أ)) نجد أن:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}. \tag{5-9}$$

ويكون:

$$m\vec{a}\cdot\vec{v}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right). \tag{5-10}$$

إذا ضربنا كلا جانبَي المعادلة (5-8) في فترة زمنية قصيرة جدًّا Δt، نحصل على:

$$\vec{F}\cdot\vec{v}\Delta t=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)\Delta t. \tag{5-11}$$

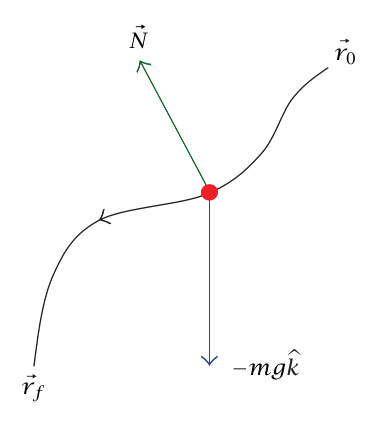
وبما أن $\vec{v}\Delta t=\Delta\vec{r}$؛ حيث $\Delta\vec{r}$ هي الإزاحة التي تَحركها الجُسيم أثناء الفترة الزمنية Δt، والجانب الأيسر للمعادلة (5-11) هو الشغل ΔW المبذول على الجُسيم أثناء الفترة الزمنية Δt، الجانب الأيمن للمعادلة (5-11) هو بالضبط التغير الحادث في الكمية $(1/2)mv^2$ أثناء الفترة الزمنية Δt؛ وبناءً على ذلك فإن الشغل المبذول على الجُسيم أثناء أي فترة زمنية قصيرة يساوي التغير في طاقة حركته أثناء هذه الفترة الزمنية. بتقسيم الفترة الزمنية من t_0 إلى t_f إلى فترات زمنية قصيرة وعديدة، فإننا نرى أن الشغل الكلي المبذول على الجُسيم أثناء هذه الفترة يساوي طاقة الحركة النهائية مطروحةً منها طاقة الحركة الابتدائية؛ مما يثبت صحة المعادلة (5-7).

تطبيق نظرية الشغل والطاقة على جُسيم يسقط سقوطًا حرًّا يؤدي إلى:

$$\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_0^2=mg\left(z_0-z_f\right). \tag{5-12}$$

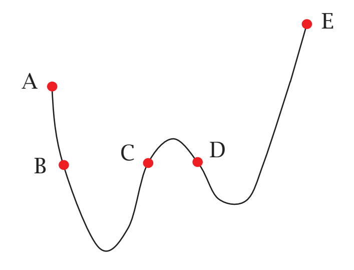
هذه النتيجة تنتج مباشرة من عملنا في الفصل الأول (تذكر أن v_x وv_y ثابتتان أثناء السقوط الحر؛ ولذا فإن v_z هي الوحيدة المتغيرة)، لكننا الآن نستطيع أن نبين أن المعادلة (5-12) صحيحة أيضًا في حالات عديدة لا يكون الجُسيم فيها ساقطًا بحرِّية. اعتبر، على سبيل المثال، جُسيمًا ما يتحرك تحت تأثير الجاذبية على سطح أملس بأي شكل. في هذه الحالة، كلٌّ من مقدار عجلة الجُسيم واتجاهها سيتغيران عادةً مع الزمن؛ ومن ثم فإن تحليل الحركة بعجلة ثابتة في الفصل الأول غير قابل للتطبيق.

ومع ذلك، فإن نظرية الشغل والطاقة قابلة دائمًا للتطبيق، بشرط أن نأخذ الحذر لحساب الشغل الكلي المبذول على الجُسيم بواسطة جميع القوى المؤثرة عليه. نلاحظ أن أي سطح أملس لا يبذل أي قوة موازية له. في هذه الحالة توجد قوتان فقط تؤثران على الجُسيم: قوة الجاذبية التثاقلية $-mg\hat{k}$ والقوة العمودية $\vec{N}$ التي يبذلها السطح. وكما



شكل ٥-٣: الشغل المبذول بواسطة الجاذبية.

لاحظنا للتوِّ، أي قوة عمودية على السطح لا تستطيع بذل شغل؛ ومن ثَمَّ فإن $\vec{N}$ لا تبذل شغلًا لأن $\vec{N}\cdot\Delta\vec{r}=0$ وذلك إذا كانت $\Delta\vec{r}$ إزاحة صغيرة في السطح. القوة الوحيدة التي تبذل شغلًا هي قوة الجاذبية التثاقلية؛ ولهذا فإن المعادلة (5-12) صحيحة.

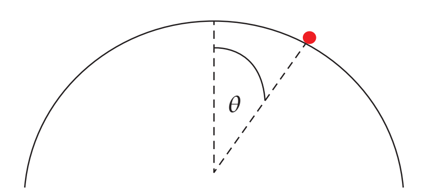


شكل ٥-٤: جُسيم يبدأ من السكون عند A سيكون له نفس مقدار السرعة عند B وC وD ولن يصل أبدًا إلى E.

إذا جعلنا الحالة «النهائية» في المعادلة (5-12) نقطة اختيارية في حركة الجُسيم، فإننا نستطيع حذف اللاحقة "f" ونكتب:

$$v^2=v_0^2+2g\left(z_0-z\right). \tag{5-13}$$

المعادلة (5-13) توضح أن مقدار سرعة الجُسيم يعتمد فقط على ارتفاعه z (وعلى القيمتين الابتدائيتين v_0 وz_0)، ولا يعتمد على شكل السطح. إذا بدأ الجُسيم من السكون فإنه لن يصل أبدًا إلى ارتفاع أكبر من ارتفاعه الابتدائي؛ لأن المعادلة (5-13) سوف تفضي إلى قيمة سالبة لـ v^2 إذا كان $z > z_0$.



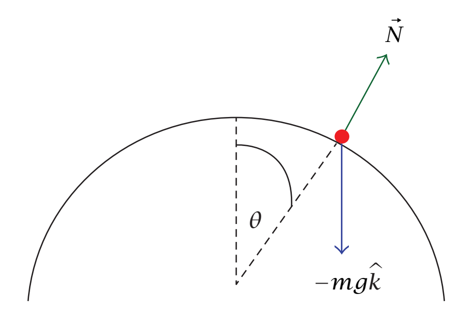
شكل ٥-٥: جُسيم يبدأ من السكون عند قمة نصف كرة وأُعطيَ دفعة متناهية في الصغر في مثال ٥-٢.

مثال ٥-٢ (جُسيم ينزلق على نصف كرة). جُسيم (كتلته m) ينزلق على سطح أملس لنصف كرة مقلوبة (نصف قطرها R)، بادئًا من السكون عند القمة (تبدأ الحركة بدفعة صغيرة). عند اللحظة التي يهبط فيها الجسم بمقدار الزاوية θ، كم يكون مقدار سرعته؟ وكم يكون مقدار القوة التي يؤثر بها نصف الكرة على الجُسيم؟ وعند أي قيمة للزاوية θ يطير الجُسيم بعيدًا عن السطح؟

إذا أخذنا نقطة الأصل عند مركز نصف الكرة، فإن $z = R\cos\theta$ والمعادلة (5-13) تعطي $v^2 = 2g(R - R\cos\theta)$. لحساب القوة التي يبذلها نصف الكرة على الجُسيم، علينا استخدام قانون نيوتن الثاني ($\vec{F} = m\vec{a}$). هناك قوتان تؤثران على الجُسيم:

(١) قوة الجاذبية التثاقلية ومقدارها mg واتجاهها رأسيًّا إلى أسفل.
(٢) القوة العمودية $\vec{N}$ التي يبذلها السطح في الاتجاه القطري إلى الخارج.

لا توجد قوى أخرى تؤثر على الجُسيم.



شكل ٥-٦: مخطط بيان القوة لجُسيم ينزلق على سطح نصف كروي في المثال ٥-٢.

متجه عجلة الجُسيم له مركَّبة v^2/R في اتجاه نصف القطر إلى الداخل ومركبة dv/dt في اتجاه المماس (إلى أسفل). لا يهمنا إلا المركبة القطرية للقوة $\vec{F} = m\vec{a}$، التي تعطي:

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R} \tag{5-14a}$$

ويكون:

$$N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{R}. \tag{5-14b}$$

بإدخال معادلة v^2 التي حصلنا عليها من نظرية الشغل والطاقة، نجد أن:

$$N = mg\cos\theta - 2mg\,(1 - \cos\theta) = mg\,(3\cos\theta - 2)\,. \tag{5-15}$$

معادلة N(5-15) ذات معنى في أمرين: عندما تكون $\theta = 0$ تعطي $N = mg$، وكلما زادت θ تناقصت N. [تحذير: بعض الطلاب سيكتب المعادلة (5-14b) على الفور دون أن يكتب المعادلة (5-14a). الشخص الذي يفعل ذلك غالبًا ما يفكر بالتأكيد في mv^2/R كقوة ثالثة تؤثر على الجُسيم وسوف تصبح في النهاية مضلِّلة. ينبغي البدء دائمًا بوضع كل القوى على أحد جانبَي علامة التساوي و$m\vec{a}$ على الجانب الآخر.]

عند أي قيمة للزاوية θ يطير الجُسيم بعيدًا؟ يجد العديد من الطلاب (بل معظمهم) صعوبة في وضع المعيار الذي يحدد النقطة التي عندها يترك الجُسيم السطح. من المهم

إدراك أن السطح يمكن فقط أن يدفع الجُسيم ولا يستطيع جذبه. بفحص المعادلة (5-15) نرى أن $N = 0$ عندما تكون $\theta = \cos^{-1}(2/3) = 48^\circ$، $N > 0$ عندما تكون $\theta < 48^\circ$، $N < 0$ عندما تكون $\theta > 48^\circ$. قيمة N السالبة تعني أن السطح يتطلب جذب الجُسيم قطريًّا إلى الداخل. وبما أن السطح لا يستطيع عمل ذلك، فإن الجُسيم سيطير بعيدًا، عندما تكون $N = 0$ ($\theta = 48^\circ$). لاحظ لو أننا كنَّا نناقش حالة خرزة تنزلق على سلك أملس مُنْحَنٍ على شكل نصف دائرة مقلوبة، فإن السلك يستطيع (ويمكنه) أن يوفر القوة الضرورية إلى الداخل عندما تكون $\theta > 48^\circ$.

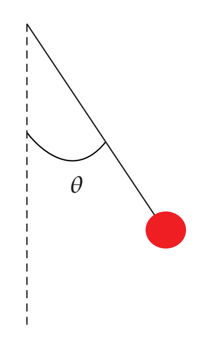
سوف تناقَش الذبذبات بتفصيل أكثر في الفصل السادس. المدخل لهذا الموضوع عادة عن طريق معادلة تفاضلية، ولكن نظرية الشغل والطاقة كافية للقيام بتحليل كامل للبندول على نحو ما سنبينه في المثال التالي.

مثال ٥–٣ (حركة بندول). يتكون بندول بسيط من كتلة نقطية m مربوطة في السقف بخيط لا وزن له طوله L. يتأرجح البندول إلى الأمام وإلى الخلف، مع البقاء دائمًا في نفس المستوى الرأسي. السعة الزاوية للذبذبة هي $\theta_{\max}$ (أي عندما يكون البندول عند إحدى نهايتَي حركته القصوى، تكون الزاوية بين الخيط والاتجاه الرأسي هي $\theta_{\max}$).

(أ) أوجد مقدار سرعة البندول والشَّد في الخيط عند اللحظة التي يصنع فيها البندول زاوية θ مع الرأسي.

(ب) بفرض أن $\theta_{\max}$ صغيرة (أقل من ٠٫١ بالتقدير الدائري)، استخدم نتيجة (أ) لحساب الزمن الدوري للبندول؛ أي الزمن اللازم لكي يتمم البندول ذبذبة كاملة. (أكثر صعوبة.)

القوة التي يبذلها الخيط متجهة بطول الخيط وعمودية على سرعة الكتلة النقطية؛ وبناءً على ذلك، في أي فترة زمنية صغيرة Δt تكون الإزاحة $\Delta\vec{r}$ للكتلة النقطية عمودية على القوة التي يبذلها الخيط؛ ومن ثَمَّ فإن الخيط لا يبذل شغلًا. الجاذبية فقط هي التي تبذل شغلًا على الكتلة؛ ولهذا نستطيع استخدام المعادلة (5-13) إذا اخترنا الصفر ليكون اللحظة التي عندها يصنع الخيط أقصى زاوية $\theta_{\max}$ مع الرأسي (ولهذا $v_0 = 0$)



شكل ٥-٧: بندول بسيط.

واخترنا "f" ليكون اللحظة التي عندها يصنع الخيط زاوية θ مع الأفقي ويكون مقدار سرعته هو v، وبهذا تعطي المعادلة (5-13):

$$v^2 = 2g\left(-L\cos\theta_{\max} + L\cos\theta\right). \tag{5-16}$$

لاستنتاج المعادلة (5-16) اخترنا نقطة الأصل عند السقف واستخدمنا العلاقة $z = -L\cos\theta$. بهذا نجد أن:

$$v = \sqrt{(2gL)\left(\cos\theta - \cos\theta_{\max}\right)}. \tag{5-17}$$

المعادلة (5-17) تعطي مقدار السرعة عند أي نقطة في حركة البندول. أثناء الذبذبة الكاملة، يمر البندول بكل نقطة مرتين، مرة ذهابًا إلى اليمين ومرة ذهابًا إلى اليسار.

المركبة نصف القطرية للقوة $\vec{F} = m\vec{a}$ تعطي:

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{L}, \tag{5-18}$$

حيث T هو الشد في الخيط. بالحل لإيجاد T واستخدام المعادلة (5-16) نجد أن

$$T = mg\left(3\cos\theta - 2\cos\theta_{\max}\right). \tag{5-19}$$

هذه المعادلة تقول إن T تكون أكبر ما يمكن عند $\theta = 0$ وأصغر ما يمكن عند $\theta = \theta_{max}$. وإذا كانت θ_{max} صغيرة جدًّا، فإن جيبَي التمام يقتربان من الواحد ويكون $T \simeq mg$ كما هو متوقع.

يمكننا استخدام المعادلة (5-17) لحساب الزمن الدوري للبندول. عندما تتغير زاوية الخيط مع الرأسي من θ إلى $\theta + d\theta$ تكون الكتلة قد قطعت المسافة $Ld\theta$. الزمن اللازم لكي تقطع الكتلة هذه المسافة هو:

$$dt = L\frac{d\theta}{v} = \sqrt{\frac{L}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{max}}}. \tag{5-20}$$

الزمن اللازم لكي يتحرك البندول من أدنى نقطة في مساره إلى إحدى نهايتَي ذبذبته يعيَّن بتكامل الجانب الأيمن للمعادلة (5-20) بالنسبة إلى θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \theta_{max}$. هذا الزمن يساوي رُبع الزمن الدوري τ؛ وعلى ذلك نجد أن:

$$\frac{\tau}{4} = \sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^{\theta_{max}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_{max}}}. \tag{5-21}$$

التكامل ليس أوليًّا (يسمى تكاملًا ناقصيًّا)، ولكن يمكن إجراؤه عندما تكون θ_{max} صغيرة بدرجة كافية. باستخدام سلسلة ماكلورين لجيب التمام[1] (حيث θ تقاس بالتقدير الدائري)، يكون $\cos\theta = 1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \cdots$، وبحذف جميع الحدود بعد الحدين الأولين نحصل على $\cos\theta - \cos\theta_{max} = (1/2)(\theta_{max}^2 - \theta^2)$ (ويكون الخطأ أقل من واحد في الألف إذا كانت $\theta_{max} < 0.1$ بالتقدير الدائري)؛ ومن ثَمَّ فإن المعادلة (5-21) تصبح:

$$\frac{\tau}{4} = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\theta_{max}}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta_{max}^2 - \theta^2}}. \tag{5-22}$$

إذا غيرنا المتغير $x = \theta/\theta_{max}$ فإن التكامل يصبح:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{5-23}$$

عند هذه المرحلة، حتى قبل تعيين التكامل النهائي، فإنه من الواضح بالبرهان أن الزمن الدوري لا يعتمد على السعة الزاوية θ_{max} (بشرط أن تكون $\theta_{max} \ll 1$). هذا

يعني أنه إذا وُجد بعض الإخماد البسيط في النظام (نتيجة مقاومة الهواء، أو احتكاك في التعليق) مسببًا نقصان $\theta_{\max}$ ببطء، فإن الزمن الدوري للبندول لا يتغير بنقصان السعة الزاوية. هذه هي الخاصية التي تتيح استخدامه كساعة يعوَّل عليها.

لإيجاد التكامل النهائي نجري تعويضًا إضافيًّا $x = \sin\phi$. وباستخدام $dx = \cos\phi\, d\phi$ و$\sqrt{1-x^2} = \cos\phi$، نجد أن:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi/2} d\phi = \frac{\pi}{2} \qquad (5\text{–}24)$$

ويكون:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \qquad (5\text{–}25)$$

إذا لم تكن السعة الزاوية للتذبذب صغيرة، فإن زمن الذبذبة يعتمد قليلًا على السعة، ويزداد بزيادة السرعة.

التفسير السابق يمكن تحديده ليعطي وصفًا كاملًا لحركة البندول، أي يعطي صيغة صريحة للزاوية θ كدالة في الزمن t. إذا أخذنا $t = 0$ عند اللحظة التي يمر فيها البندول بنقطته الدنيا، متحركًا جهة اليمين، فإن الزمن t اللازم لذهاب البندول من نقطته الدنيا إلى زاوية θ هو:

$$t = L\int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{v\,(\theta')}. \qquad (5\text{–}26)$$

استدعينا متغير التكامل θ' لكي نميزه عن θ التي هي الحد الأعلى للتكامل.

بفرض، مرة ثانية، أن $\theta_{\max}$ صغيرة جدًّا، نحصل على:

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\theta_{\max}^2 - \theta'^2}}. \qquad (5\text{–}27)$$

بتغيير متغير التكامل $\theta' = \theta_{\max}\sin\phi$ نجد أن:

$$t = \sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\sin^{-1}\theta/\theta_{\max}} d\phi = \sqrt{\frac{L}{g}}\sin^{-1}\left(\frac{\theta}{\theta_{\max}}\right). \qquad (5\text{–}28)$$

بالحل لإيجاد θ نحصل على:

$$\theta = \theta_{\max} \sin\left[\sqrt{\frac{g}{L}}t\right] \tag{5-29a}$$

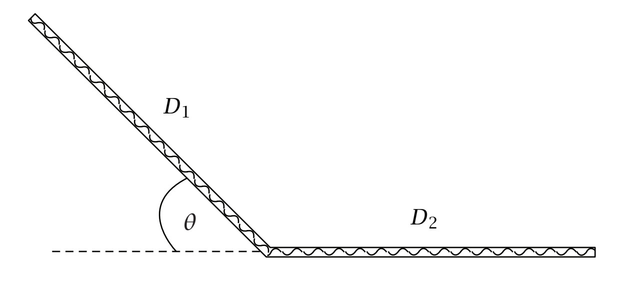
التي تصف حركة تذبذبية بوضوح. لو كنا أخذنا $t = 0$ عند اللحظة التي يكون فيها $\theta = \theta_{\max}$ فإن المعادلة (5-29b) تستبدل بالمعادلة (5-29a) كما يلي:

$$\theta = \theta_{\max} \cos\left[\sqrt{\frac{g}{L}}t\right]. \tag{5-29b}$$

مثال ٥-٤ (انزلاق إلى أسفل). بدأت مزلجة من السكون متحركة إلى أسفل تلٍّ طوله D_1 وزاويته θ، وتستمر بطول حقل مسطح إلى أن تصل إلى السكون على بُعد D_2 من قاعدة التل. باستخدام نظرية الشغل والطاقة، استنتج معادلة لإيجاد معامل الاحتكاك الحركي μ_k بين المزلجة والجليد، بدلالة D_1 وD_2 وθ. [الركن عبارة عن منحنى لا احتكاكي قصير]. التل والحقل يكسوهما الثلج، لكننا نفترض أن تأثير مزلجات عديدة ترتطم بالركن قد حوَّله إلى جليد أملس. إذا كان معامل الاحتكاك الحركي للركن لا يساوي صفرًا، فإنه ليس من الصواب إهمال تأثير الركن حتى لو كان قصيرًا جدًّا (انظر المسألة ٣-٨).

إحدى طرق حل هذه المسألة أن تستخدم $\vec{F} = m\vec{a}$ والمعادلات الكينماتيكية في الفصل الأول (ينبغي أن تفعل هذا).

نظرية الشغل والطاقة تتيح حلًّا مباشرًا وموجزًا، إذا اخترنا الصفر "0" ليكون اللحظة التي تكون المزلجة عندها ساكنة على قمة التل، و"f" اللحظة التي تصل عندها أخيرًا إلى السكون عند القاعدة، فإن $v_0 = v_f = 0$؛ ومن ثَمَّ يكون $W_{\text{grav}} + W_{\text{fric}} = 0$ (حيث W_{grav} وW_{fric} هما الشغل المبذول بالجاذبية والاحتكاك، على الترتيب). من المعادلة (5-6) لدينا $W_{\text{grav}} = mgD_1 \sin\theta$. وعلى المنحدر، مقدار القوة الاحتكاكية هو $\mu_k mg\cos\theta$ وتعمل في عكس اتجاه حركة المزلجة؛ بذلك يكون الشغل المبذول



شكل ٥-٨: انزلاق إلى أسفل فوق حقل مسطح.

بالاحتكاك أثناء هبوط المزلجة على المنحدر هو $-\mu_k D_1 mg\cos\theta$، بالمثل، الشغل المبذول بالاحتكاك أثناء حركة المزلجة بطول الحقل المسطح، هو $-\mu_k mgD_2$؛ وعليه فإن:

$$mgD_1\sin\theta - \mu_k mgD_1\cos\theta - \mu_k mgD_2 = 0 \longrightarrow$$
$$\mu_k = \frac{D_1\sin\theta}{D_1\cos\theta + D_2}. \tag{5-30}$$

(٣) طاقة الجهد

حيثما نجد حالة تكون فيها قوة الجاذبية هي القوة الوحيدة التي تبذل شغلًا على جُسيم ما، (يُفترض، في الوقت الحالي، أنها ثابتة في المقدار والاتجاه)، فإن المعادلة (5-12) تكون قابلة للتطبيق. يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة على الصورة:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0 = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_f. \tag{5-31}$$

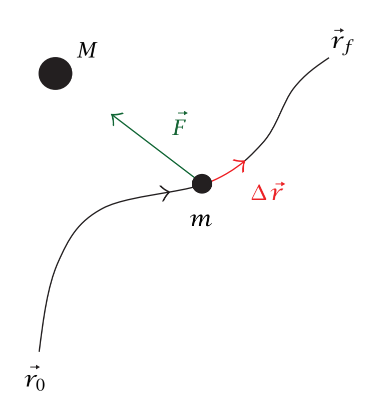
وبما أن 0 وf لحظتان اختياريتان، فإننا نرى أن الكمية $(1/2)mv^2 + mgz$ لها نفس القيمة في كل الأزمنة؛ أي إن:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{constant}. \tag{5-32}$$

المعادلة (5-32) تتشابه في المحتوى مع المعادلة (5-12)، لكننا نتأملها بطريقة مختلفة نوعًا ما. لقد أعطينا بالفعل اسمًا للكمية $(1/2)mv^2$، وهو طاقة الحركة. المعادلة (5-32) تنص على أن مجموع طاقة الحركة والكمية mgz يظل ثابتًا أثناء الحركة؛ ولهذا فإن أي زيادة (أو نقصان) في طاقة الحركة يجب أن يكون مصاحبًا بنقصان (أو زيادة) مناظر في mgz. الكمية mgz تسمى طاقة الجهد (الموضع)، والمعادلة (5-32) تنص على أن:

$$\text{Kinetic energy} + \text{Potential energy} = \text{constant}. \qquad (5\text{-}33)$$

حاصل الجمع الثابت لطاقة الحركة وطاقة الجهد (الموضع) يسمى الطاقة الميكانيكية الكلية، والمعادلة (5-33) تسمى مبدأ حفظ الطاقة. (نشير هنا إلى «الطاقة الميكانيكية» لأن هناك «أنواعًا» أخرى للطاقة. «الطاقة الميكانيكية» مصطلح يشير تحديدًا إلى الطاقة المصاحبة للموضع ومقدار سرعة مكوِّنات نظام ما.) يجب تذكُّر أننا قد أثبتنا هذا المبدأ فقط لحالة خاصة تتحقق فيها المعادلة (5-12) (في مثال ٥-٤، الشغل الذي يبذله الاحتكاك الحركي يُبطل المبدأ). تمديد المبدأ إلى حالات أخرى ليس ممكنًا دائمًا، سوف نناقش الآن الظروف التي عندها يكون مثل هذا التمديد ممكنًا.



شكل ٥-٩: الشغل الذي تبذله الجاذبية.

نظرية الشغل والطاقة، الصحيحة دائمًا (لأنها تنتج من $\vec{F} = m\vec{a}$ بدون فروض إضافية)، تؤكد أن:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \tag{5-34}$$

حيث الطرف الأيمن هو الشغل الكلي المبذول على الجسم لكي ينتقل من $\vec{r}_0$ إلى $\vec{r}_f$. دعنا نعتبر، بوجه خاص، حالة جُسيم كتلته m ومتحرك تحت تأثير الجاذبية التثاقلية لكتلة نقطية M (أُبقي على موضعها ثابتًا). عندئذٍ يكون:

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}, \tag{5-35}$$

حيث r المسافة بين M وm، و$\hat{r}$ متجه وحدة يشير من M إلى m. وما يهمنا تحديدًا هو حالات تكون فيها $\vec{r}_0$ و$\vec{r}_f$ مختلفتين بما يكفي بحيث لا تُعامَل $\vec{F}$ على أنها ثابتة بطول المسار من $\vec{r}_0$ إلى $\vec{r}_f$. المسار الذي تقطعه m عبارة عن منحنى إلى حدٍّ ما، ويمكن تقسيمه إلى خطوات صغيرة عديدة تُمثَّل كلٌّ منها بالمتجه $\Delta\vec{r}$. يمكن تحليل $\Delta\vec{r}$ إلى قطعتين؛ إحداهما توازي $\hat{r}$ والأخرى متعامدة عليه. وعندما نحسب الشغل $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$، فإن القطعة $\Delta\vec{r}$ التي توازي $\hat{r}$ هي فقط التي تسهم في حاصل الضرب القياسي. وإذا أدخلنا إحداثيات قطبية (بأخذ نقطة الأصل عند M)، فإن المتجه $\Delta\vec{r}$ يبدأ من النقطة ذات الإحداثيات القطبية (r, θ, ϕ) إلى النقطة المجاورة $(r + \Delta r,\ \theta + \Delta\theta,\ \phi + \Delta\phi)$. القطعة $\Delta\vec{r}$ بطول الاتجاه القطري هي $(\Delta r)\hat{r}$؛ وبهذا نجد أن:

$$\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \left[-\frac{GMm}{r^2}\hat{r}\right]\cdot[(\Delta r)\,\hat{r}] = -\frac{GMm}{r^2}\Delta r \tag{5-36}$$

حيث $\hat{r}\cdot\hat{r} = 1$.

لتكن $\Delta r \to 0$، وبإضافة جميع الإسهامات من كل الخطوات، نجد أن:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{r_0}^{r_f}\frac{GMm}{r^2}dr = \frac{GMm}{r_f} - \frac{GMm}{r_0}. \tag{5-37}$$

يوضح هذا الحساب أن الشغل المبذول بالجاذبية يعتمد فقط على نقطتَي نهاية المسار؛ ومن ثَمَّ يكون هو نفسه لكل المسارات بين هاتين النقطتين (أوضحنا هذا سابقًا بفرض أن قوة الجاذبية التثاقلية ثابتة). بإدخال المعادلة (5-37) في المعادلة (5-34) نجد أن:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{GMm}{r_f} - \frac{GMm}{r_0} \qquad (5\text{–}38)$$

أو بصيغة مكافئة:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constant.} \qquad (5\text{–}39)$$

في هذه الحالة نسمي $-GMm/r$ طاقة الجهد التثاقلية لأن مجموع هذه الكمية وطاقة الحركة يظل ثابتًا.

ذكرنا في الفصل الثالث أن (بفرض أن الأرض كروية) قوة الجاذبية التثاقلية التي تبذلها كتلة نقطية M_e (M_e = كتلة الأرض) موضوعة عند مركز الأرض (أوضحنا برسم تخطيطي كيفية إثبات هذا بحساب التكامل، لكن لم نعرض البرهان تفصيلًا). بما أن g هي قوة الجاذبية التثاقلية لوحدة الكتلة المؤثرة على جسم ما بالقرب من سطح الأرض، فإنه ينتج أن:

$$g = \frac{GM_e}{R^2}, \qquad (5\text{–}40)$$

حيث R نصف قطر الأرض. فضلًا عن ذلك، إذا كنا نناقش حركة جُسيم ما قريب من سطح الأرض، فينبغي أن نكون قادرين على توضيح أن طاقة الجهد $-GM_em/r$ (حيث r المسافة بين m ومركز الأرض) تكافئ طاقة الجهد التي سبق تعريفها mgz. لإدراك هذا نكتب $r = z + R$؛ حيث z ارتفاع الجُسيم فوق سطح الأرض. إذا كان $z \ll R$، فإننا نستطيع استخدام نظرية ذات الحدين[2] لنكتب:

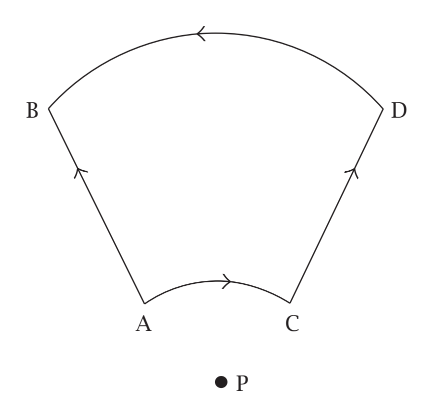
$$-\frac{GM_em}{z+R} \simeq -GM_em\left(\frac{1}{R} - \frac{z}{R^2}\right) = -\frac{GM_em}{R} + mgz. \qquad (5\text{–}41)$$

وهكذا نرى أن التعبيرين الخاصين بطاقة الجهد مختلفان فقط بثابت إضافي (جمعي) لا يعتمد على z. وحيث إنه في جميع الحسابات لا يدخل إلا فرق طاقة الموضع (الجهد) بين نقطتين، فإن التعبيرين في حقيقة الأمر متكافئان.

خاصية قوة الجاذبية التثاقلية التي مكنتنا من تعريف طاقة الجهد (أي إيجاد كمية تعتمد فقط على موضع الجُسيم بحيث يظل مجموع تلك الكمية وطاقة الحركة ثابتًا) هي ما يلي: الشغل المبذول بواسطة الجاذبية على جُسيم ما يتحرك بين نقطتين لا يعتمد على المسار. سوف نوضح الآن أنه حيثما يكون للقوة $\vec{F}$ المؤثرة على جُسيم ما خاصية أن الشغل لا يعتمد على المسار، فإنه يمكن تعريف طاقة الجهد.

واختصارًا للكلمات، نقدم التعريف الآتي: توصف قوة ما $\vec{F}$ بأنها محافظة إذا كان الشغل الذي تبذله $\vec{F}$ على جُسيم ما يتحرك بين أي نقطتين هو نفسه لجميع المسارات بين هاتين النقطتين.

لقد رأينا فعلًا أن الجاذبية قوة محافظة، وأثبتنا هذا فقط للحالة التي تُعزى فيها قوة الجاذبية التثاقلية إلى جُسيم مفرد، لكن إذا كانت قوة الجاذبية التثاقلية تعزى إلى عدة كتل نقطية في مواضع مختلفة، فإن القوة تكون جمعيَّة متجهيًّا (أي إن صافي القوة يكون حاصل الجمع المتجهي للقوى المبذولة بواسطة كتل مفردة)؛ وعليه يكون الشغل جمعيًّا؛ ومن ثَمَّ يكون الشغل الكلي هو نفسه لكل المسارات بين أي نقطتين محددتين.

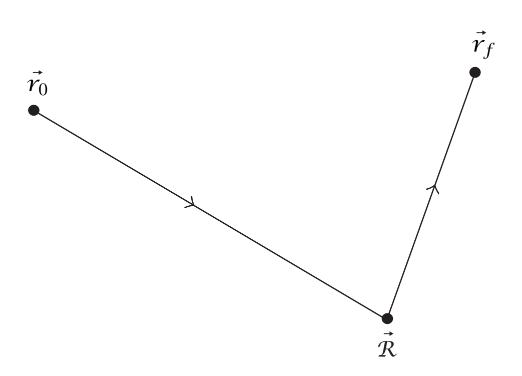


شكل ٥-١٠: أي قوة متجهة نحو P أو مبتعدة عنها يمكن أن تكون أو لا تكون محافظة.

نفس التفسير الذي أوضح أن قوة الجاذبية التثاقلية نتيجة كتلة نقطية مفردة تكون محافظة، يوضح أيضًا أن أي قوة متجهة نحو نقطة ثابتة في المكان (أو مبتعدة

عن)، ويعتمد مقدارها فقط على بُعدها عن تلك النقطة، تكون قوة محافظة. ومع ذلك، إذا كانت القوة متجهةنحو نقطة ثابتة، لكن مقدارها يعتمد على البُعد والاتجاه بالنسبة إلى النقطة الثابتة، فإن القوة لا تكون محافظة. في شكل ٥-١٠، حيث القوة متجهة دائمًا نحو النقطة P، دعنا نقارن الشغل المبذول على المسار AB بالشغل المبذول على المسار ACDB (AC وDB قوسان في دائرتين مركزهما P). لا يوجد شغل مبذول على AC أو DB؛ لأن القوة تكون عمودية على الإزاحة عند كل خطوة ضئيلة. إذا كان مقدار القوة يعتمد فقط على البعد عن P، فإن الشغل المبذول على المسار AB هو نفس الشكل المبذول على المسار CD. لكن إذا كان مقدار القوة يعتمد على الاتجاه من P فإن الشغل المبذول على المسار AB لا يكون مساويًا للشغل المبذول على المسار CD؛ ومن ثَمَّ لا يكون الشغل المبذول على المسار AB مساويًا للشغل المبذول على المسار ACDB.

الاحتكاك مثال مهم لقوة غير محافظة. إذا ملئ حيِّز ما بوسط (مثلًا هواء أو ماء) يبذل قوة معوِّقة على جسم متحرك، فإن الشغل الذي تبذله هذه القوة المعوِّقة (الاحتكاك) يعتمد على طول المسار الذي يقطعه الجسم، ويعتمد أيضًا على مقدار السرعة التي يجتاز بها الجسم هذا المسار.



شكل ٥-١١: رسم تخطيطي لبرهان المعادلة (43-5).

إذا كانت قوة ما $\vec{F}$ محافظة، فإن الشغل الذي تبذله $\vec{F}$ على جُسيم ما يتحرك من $\vec{r}_0$ إلى $\vec{r}_f$ يكون دالة فقط في $\vec{r}_0$ و$\vec{r}_f$ ولا يعتمد على المسار. نسمي الشغل $W(\vec{r}_0, \vec{r}_f)$.

الدالة $W(\vec{r}_0,\vec{r}_f)$ لها شكل خاص؛ فهي الفرق لدالة في $\vec{r}_0$ ونفس الدالة في $\vec{r}_f$. لإدراك هذا، نلتقط اختياريًّا نقطة ما مثبتة $\vec{\mathcal{R}}$ (تسمى نقطة الإسناد)، ونعرِّف:

$$V\left(\vec{r}\right)=W\left(\vec{r},\vec{\mathcal{R}}\right), \tag{5-42}$$

أي إن $V(\vec{r})$ هو الشغل الذي تبذله $\vec{F}$ على جُسيم متحرك من $\vec{r}$ إلى نقطة الإسناد. بما أن $W(\vec{r}_0,\vec{r}_f)$ لا يعتمد على المسار، فإننا نستطيع اختيار مسار يبدأ من $\vec{r}_0$ حتى $\vec{\mathcal{R}}$، ثم يستمر من $\vec{\mathcal{R}}$ إلى $\vec{r}_f$؛ وبهذا نجد أن $W(\vec{r}_0,\vec{r}_f)=W(\vec{r}_0,\vec{\mathcal{R}})+W(\vec{\mathcal{R}},\vec{r}_f)$. لكن $W(\vec{\mathcal{R}},\vec{r}_f)+W(\vec{r}_f,\vec{\mathcal{R}})=W(\vec{\mathcal{R}},\vec{\mathcal{R}})=0$ لأن أحد المسارين من $\vec{\mathcal{R}}$ إلى $\vec{\mathcal{R}}$ هو مسار الطول الصفري؛ وبناءً على ذلك يكون:

$$W\left(\vec{r}_0,\vec{r}_f\right)=V\left(\vec{r}_0\right)-V\left(\vec{r}_f\right). \tag{5-43}$$

ترتيبًا على ذلك، إذا كانت جميع القوى التي تبذل شغلًا محافظة، فإن نظرية الشغل والطاقة تعطي:

$$\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_0^2=V\left(\vec{r}_0\right)-V\left(\vec{r}_f\right) \tag{5-44}$$

وهذه المعادلة تعني ضمنًا أن:

$$\frac{1}{2}mv^2+V\left(\vec{r}\right)=\text{constant}. \tag{5-45}$$

الدالة $V(\vec{r})$ تسمى طاقة الجهد، والمعادلة (5-45) هي نص مبدأ حفظ الطاقة.

إذا تحرك جُسيم تحت تأثير قوة (أو قوى) محافظة بجهد مصاحب V وأيضًا تحت تأثير قوة غير محافظة (مثل الاحتكاك)، فإن نظرية الشغل والطاقة تعطي (باستخدام .K.E و .P.E لترمزا إلى طاقتَي حركة وجهد):

$$\text{K.E.}_f+\text{P.E.}_f=\text{K.E.}_0+\text{P.E.}_0+W', \tag{5-46}$$

حيث W' هو الشغل الذي تبذله القوى غير المحافظة أثناء حركة الجُسيم من $\vec{r}_0$ إلى $\vec{r}_f$. إذا كانت القوة غير المحافظة هي معوِّقة احتكاكية في عكس اتجاه الحركة، فإن $W'<0$.

نقطة الإسناد $\vec{\mathcal{R}}$ اختيارية، والتغير في نقطة الإسناد يؤدي إلى تغير طاقة الجهد عند جميع النقاط بواسطة ثابت جمْعي (أثبت هذا!). وحيث إن المعادلة (5-44) تشتمل على فرق طاقتَي الجهد عند نقطتين، فإن الثابت الجمعي في V لن يغيِّر أي شيء. التعريف الذي تقدمه المعادلة (5-42) يعني ضمنًا أن $V(\vec{\mathcal{R}}) = 0$؛ وبناءً على ذلك، إذا عرَّفنا طاقة جهد الجاذبية بأنها $V(\vec{r}) = -GMm/|\vec{r}|$، فإننا قد اخترنا نقطة الإسناد $\vec{\mathcal{R}}$ كنقطة لا نهائية البعد عن النقطة M. وإذا اخترنا نقطة الإسناد كنقطة على سطح الأرض، فإن $V(\vec{r}) = -GMm/|\vec{r}| + GMm/R$. في هذه الحالة يكون الجهد عند نقاط قريبة من سطح الأرض هو mgz، وهو ما يتفق مع عملنا السابق.

مثال ٥-٥ (سرعة الإفلات من الأرض). بأي سرعة يجب إطلاق مقذوف من سطح الأرض لكي يُفلت (يهرب) إلى ما لا نهاية؟ (أهمل مقاومة الهواء، وتأثير دوران الأرض، وتأثير كلٍّ من الشمس والقمر).

إذا كان v_e هو مقدار سرعة المقذوف عند مغادرته الأرض، وv_∞ مقدار سرعته عندما يكون بعيدًا إلى ما لا نهاية (أي يكون بُعده عن الأرض كبيرًا بأضعاف نصف قطر الأرض R). عندئذ تعني المعادلة (5-45) أن:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 - GM_e\frac{m}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2. \tag{5-47}$$

ما يهمنا هو أقل قيمة للسرعة v_e التي تتيح للمقذوف أن يصل إلى ما لا نهاية. بوضع $v_\infty = 0$ نجد أن $v_e = \sqrt{2GM_e/R} = \sqrt{2gR}$. هذه السرعة تسمى سرعة الإفلات (أو الهروب) من الأرض. لاحظ أن $v_e = \sqrt{2}v_o$؛ حيث v_o هي سرعة قمر صناعي ما في مسار دائري نصف قطره يساوي نصف قطر الأرض (انظر الفصل الثالث)، عدديًّا، $v_o = 18000$ mi/hr و$v_e = 25000$ mi/hr. أحيانًا يصف علماء الفضاء وكُتَّاب الخيال العلمي مدار الأرض المنخفض بأنه «نصف الطريق إلى أي مكان» أو «نصف الطريق إلى ما لا نهاية»؛ لأن طاقة حركة المقذوف في مدار الأرض المنخفض تساوي نصف طاقة الحركة اللازمة للهروب كليًّا من تأثير جاذبية الأرض.

(٤) دلالة أكثر عمومية للطاقة (نقاش كيفي)

من المحتمل أن يكون القارئ على دراية بأن نظرية الشغل والطاقة تكفي لأغراضنا في المرحلة التمهيدية للفيزياء بقدر ما يُحَلُّ من المسائل. وإدخال مفهوم طاقة الجهد لم يكن ضروريًّا في الواقع. ومع ذلك، فإن أي مقرر في الميكانيكا يعرض لمفهوم «طاقة الجهد» ويشجع الطلاب على استخدام مبدأ حفظ الطاقة بقدر الإمكان. لكن الطالب عليه أن يتذكر دائمًا أن الطاقة الميكانيكية لا تكون محفوظة في وجود قوى غير محافظة (أكثرها شيوعًا قوة الاحتكاك).

ما السبب في هذا التوكيد والتشديد على الطاقة وحفظ الطاقة عندما لا يبدو دائمًا أن المبدأ الأخير صحيح؟ الإجابة هي: إذا نظرنا إلى الأشياء بتفصيل كافٍ (قد يتطلب هذا مجهرًا (ميكروسكوبًا) عالي القدرة)، فإننا سوف نجد أن الطاقة محفوظة دائمًا.

اعتبر، على سبيل المثال، قالبًا ينزلق على منضدة أفقية ويصل في النهاية إلى السكون بسبب الاحتكاك. في البداية كان للقالب طاقة حركة، وفي النهاية لم تكن له طاقة حركة. طاقة جهد الجاذبية التثاقلية للقالب هي نفسها في حالتَي البداية والنهاية؛ وبناءً على ذلك لا تكون الطاقة الميكانيكية (كما عرَّفناها) محفوظة، والطاقة الميكانيكية النهائية مطروحًا منها الطاقة الميكانيكية الابتدائية تساوي W'، الشغل الذي يبذله الاحتكاك، لكن إذا فحصنا القالب بمجهر ذي قدرة كافية فسوف نرى أن الجزيئات المفردة في القالب ليست ساكنة، وإنما تهتز حول مواضع اتزانها بطريقة عشوائية. فضلًا عن ذلك، سوف نرى أن كمية الاهتزاز الجزيئي في الحالة النهائية للقالب أكبر قليلًا من كمية الاهتزاز الجزيئي في الحالة الابتدائية. وعلى المستوى العياني، سنجد أن القالب في حالته النهائية أدفأ قليلًا منه في الحالة الابتدائية. بالمثل، تزداد اهتزازات جزيئات المنضدة عندما ينزلق القالب عليها، ويصبح سطح المنضدة أدفأ قليلًا. لكل جزيء مهتز طاقة حركة، وهناك كمية ملموسة من طاقة حركة «غير مرئية» في شكل اهتزاز جزيئي.

عندما نتحدث عن «طاقة الحركة» في الميكانيكا الكلاسيكية، فإننا نرجع فقط إلى طاقة الحركة المرئية للقالب (أي $(1/2)MV^2$؛ حيث M وV هما كتلة القالب وسرعته) ولا نقتفي أثر طاقة الحركة الخفية «غير المرئية». وإذا ما أخذنا في تقديرنا طاقة الحركة الخفية فإننا سنجد أن الطاقة الميكانيكية الكلية للنظام (القالب + المنضدة) في الحالة النهائية تساوي الطاقة الميكانيكية الكلية للنظام (القالب + المنضدة) في الحالة

الابتدائية. باختصار، طاقة الحركة المجهرية التي يفقدها القالب تحوَّلت إلى طاقة حركة زائدة للجزيئات المهتزة في القالب وفي المنضدة. من وجهة النظر الماكروسكوبية (العيانية) للميكانيكا الكلاسيكية، يمكن للطاقة أن تُفقد، ولكن من وجهة النظر الميكروسكوبية (المجهرية)، يتحول بعض الطاقة فقط إلى طاقة مرئية أقل.

استكمالا للمناقشة، ينبغي ملاحظة أن الطاقة «الخفية» ليست بالضرورة طاقة حركية، ولكنها يمكن أيضًا أن تكون طاقة جهد. على سبيل المثال، عندما تصل طلقة رصاص إلى السكون في قالب خشبي، لا تتحول كل طاقة حركتها إلى طاقة حركة اهتزاز جزيئي؛ فالخشب له طاقة جهد داخلية تعتمد على ترتيب الجزيئات الذي يتغير عند دخول طلقة الرصاص في القالب، وتتحول طاقة حركة الطلقة جزئيًّا إلى طاقة اهتزاز جزيئي، وجزئيًّا إلى طاقة جهد داخلية للخشب.

البرهنة على حقيقة أن الطاقة (المعرَّفة تقريبيًّا) محافظة دائمًا تقع خارج نطاق ميكانيكا نيوتن؛ فالميكانيكا النيوتونية تستطيع على نحوٍ رائع أن تقدم توقعات عديدة لا تعتمد على ما يحدث على المستوى المجهري، والوصف الدقيق للعديد من هذه الظواهر يتطلب ميكانيكا الكوانتم (الكم) التي تختلف جذريًّا عن الميكانيكا النيوتونية. وإننا نؤكد للمرة الثانية على أنه في إطار تعريفنا الماكروسكوبي (المفيد رغم اختصاره) للطاقة، يمكن لطاقة نظام ما أن تكون أو لا تكون محافظة.

(٥) التصادمات المرنة وغير المرنة

سبق أن ناقشنا التصادم الذي يلتصق فيه جسمان متصادمان معًا. في هذه الحالة تُعيَّن السرعة النهائية باستخدام مبدأ حفظ كمية التحرك. وبصورة خاصة، دعنا نعتبر جُسيمًا كتلته m_1 وسرعته $\vec{v}_1$ يتصادم مع جُسيم كتلته m_2 كان ساكنًا في البداية. إذا التصق الجسمان معًا، فإن السرعة النهائية تكون $\vec{V} = (m_1/m_1 + m_2)\vec{v}_1$ وتكون طاقة الحركة النهائية هي:

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) V^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)}. \qquad (5\text{–}48)$$

وبما أن طاقة الحركة الابتدائية كانت $(1/2)m_1 v_1^2$، فإنه يكون لدينا:

$$\frac{\text{K.E.}_{\text{final}}}{\text{K.E.}_{\text{initial}}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \qquad (5\text{–}49)$$

وبناءً على ذلك، إذا كان $m_1 = m_2$ فإننا نجد أن نصف طاقة الحركة الأصلية قد فُقِد في التصادم. وطبقًا للمناقشة الواردة في القسم السابق، تكون الطاقة المفقودة قد تحوَّلت إلى طاقة حركة جزيئية وطاقة جهد داخلية للجسمين المتصادمين. وحقيقة أن هذين الجسمين يلتصقان معًا تضمن وجود آلية ما لتحويل طاقة حركة عيانية (ماكروسكوبية) إلى طاقة حركة وجهد مجهرية (ميكروسكوبية) «غير مرئية». إذا لم توجد مثل هذه الآلية، فإن الجسمين المتصادمين لا يمكن أن يلتصقا معًا.

التصادم الذي تكون فيه طاقة الحركة الماكروسكوبية النهائية أصغر من طاقة الحركة الماكروسكوبية الابتدائية يسمى تصادمًا غير مرن. إذا كانت طاقة الحركة النهائية مساوية لطاقة الحركة الابتدائية، فإن التصادم يسمى تصادمًا مرنًا. التصادم بين كرتين مَلساوَين من الصلب غالبًا ما يكون مرنًا تمامًا (تام المرونة). هناك، طبعًا، درجات متغيرة لعدم المرونة؛ على سبيل المثال، يمكن أن تكون طاقة الحركة النهائية أقل قليلًا من طاقة الحركة الابتدائية، حتى لو كان الجسمان المتصادمان لا يلتصقان معًا.

وعندما يتصادم جُسيمان، فإنه يوجد (كما سبق أن ناقشنا) حالات نهائية عديدة ممكنة ومتسقة مع مبدأ حفظ كمية الحركة. ومن السهل توضيح أنه من بين جميع هذه الحالات تكون الحالة الأقل طاقة حركة هي الحالة التي يكون فيها للجُسيمين نفس السرعة النهائية؛ أي إنهما يلتصقان معًا. التصادم الذي يلتصق فيه الجُسيمان معًا يسمى التصادم غير المرن تمامًا (أو غير تام المرونة). بدقة أكثر، لا بد أن نسمِّي مثل هذا التصادم أكثر تصادم غير مرن؛ لأنه بصورة عامة لا يزال هناك بعض الطاقة الحركية الماكروسكوبية في الحالة النهائية. حفظ كمية التحرك يضع حدًّا لكمية طاقة الحركة التي يمكن تحوُّلها إلى الشكل المجهري. وعندما يلتصق معًا جُسيمان متصادمان فإن طاقة الحركة النهائية تكون $P^2/2M$؛ حيث P هي كمية التحرك الكلية وM الكتلة الكلية.

إذا كان النظام خاليًا من أي قوى خارجية، فإن كمية التحرك الكلية تكون محافظة. وبخلاف الطاقة، لا يمكن تحويل كمية التحرك إلى صورة «غير مرئية»، ولن يحمل الاهتزاز الجزيئي العشوائي أي كمية تحرك صافية لأن جزيئات عديدة تتحرك في اتجاه ما، وأخرى مثلها تتحرك في اتجاه آخر. إذا كانت هناك سرعة غير عشوائية «سرعة انسياق» متراكبة على الاهتزاز، فإن الجسم بأكمله سوف يتحرك بسرعة الانسياق

هذه؛ وبذلك تكون كمية التحرك كلها مرئية، ويمكننا توقع أن تكون كمية التحرك محافظة حتى عندما لا تكون الطاقة (ظاهريًّا) كذلك، بشرط ألا تؤثر أي قوة خارجية على النظام.

m_1 $\vec{v}_{1i}$ m_2 m_1 m_2 $\vec{v}_{1f}$ $\vec{v}_{2f}$

شكل ٥-١٢: قبل وبعد تصادم مرن في بعد واحد.

رأينا أن حفظ كمية التحرك يحدد تمامًا الحالة النهائية في تصادم غير مرن تمامًا. ثَمَّةَ موقف آخر مهم تكون فيه الحالة النهائية محددة تمامًا؛ وهو التصادم المرن في بُعد واحد. ونقصد «بالبعد الواحد» أن توجد جميع الجُسيمات على خط، مثل المحور x. توجد سرعتان مجهولتان في الحالة النهائية (نسميهما v_{1f} وv_{2f}). ويفرض حفظ كمية التحرك شرطًا واحدًا على المجهولين، إذا كنا نطلب أيضًا حفظًا للطاقة، يكون لدينا معادلة أخرى؛ ومن ثَمَّ تُحدد الحالة النهائية.

للتبسيط، نفترض أن m_2 ساكن في البداية، وأن m_1 في البداية كانت سرعته v_{1i}. حفظ كمية التحرك يتطلب:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{5-50}$$

وحفظ الطاقة يتطلب:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \tag{5-51}$$

وبحل المعادلة (5-50) لإيجاد v_{1f} يكون:

$$v_{1f} = v_{1i} - \frac{m_2}{m_1} v_{2f} \tag{5-52}$$

وبالتعويض بالمعادلة (5-52) في المعادلة (5-51) نحصل على المعادلة التربيعية:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 \left[v_{1i}^2 + \frac{m_2}{m_1} v_{2f}^2 - 2 \frac{m_2}{m_1} v_{1i} v_{2f} \right] + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{5-53}$$

لإيجاد المجهول v_{2f}. بقليل من الجبر يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة على الصورة:

$$0 = v_{2f}\left[\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)v_{2f} - 2v_{1i}\right] \tag{5-54}$$

وجذراها هما $v_{2f} = 0$ و$v_{2f} = 2v_{1i}/(1 + m_2/m_1)$. ما المغزى الفيزيائي لهذين الجذرين؟ إذا كان $v_{2f} = 0$ فإن المعادلة (5-52) تعني ضمنًا أن $v_{1f} = v_{1i}$. هذا الحل، الذي فيه تكون السرعتان النهائيتان لكلا الجُسيمين متماثلتين مع سرعتيهما الابتدائيتين، يفي بوضوح حفظ الطاقة وكمية التحرك، لكنه فيزيائيًّا يكون ذا معنى فقط إذا لم يكن هناك تآثر بين الجُسيمين (بحيث يمكن للكتلة m_1 أن تعبر خلال m_2 دون أن تبذل قوة عليها).

الحل الآخر هو:

$$v_{2f} = \frac{2v_{1i}}{1 + m_2/m_1} \tag{5-55}$$

ويعني (باستخدام المعادلة (5-52)) أن المعادلة:

$$v_{1f} = v_{1i}\frac{1 - m_2/m_1}{1 + m_2/m_1} \tag{5-56}$$

هي المهمة فيزيائيًّا.

من المفيد تعليميًّا فحص المعادلتين (5-55) و(5-56) في حالات حدِّية متنوعة، لكي نرى ما إذا كانت الصياغتان متَّسقتين مع توقعاتنا. هناك ثلاث حالات حدِّية يمكن فهمها ببساطة:

(١) افترض أن $m_2/m_1 \gg 1$ (كرة تنس الطاولة تصطدم مباشرةً بكرة بولينج ثابتة). نتوقع أن تظل كرة البولينج ساكنة أساسًا وترتد كرة الطاولة (مثلما ترتد من حائط صلد) بسرعة تساوي سرعتها الابتدائية في المقدار وتُضادُّها في الاتجاه؛ بهذا نتوقع أن يكون $v_{2f} = 0$ و$v_{1f} = -v_{1i}$، وهو ما يتفق مع المعادلتين (5-55) و(5-56) عندما يكون $m_2/m_1 \gg 1$.

(٢) افترض أن $m_1 = m_2$؛ عندئذٍ تؤدي المعادلتان (5-55) و(5-56) إلى أن يكون $v_{2f} = v_{1i}$ و$v_{1f} = 0$؛ أي إن الجُسيمين يتبادلان السرعتين. هذا الحل مألوف لدى لاعبي البلياردو ودفع الأقراص، ويمكن فهمه بسهولة بالنظر إلى التصادم من منظور

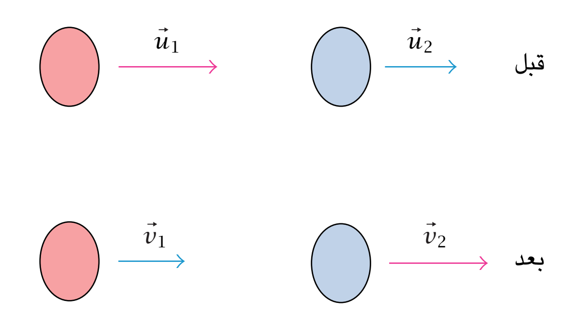
إطار قصوري آخر، نظام مركز الكتلة. سرعة مركز الكتلة هي $(1/2)v_{1i}$، وفي هذا الإطار يكون التصادم متماثلًا؛ أي إن سرعة الجُسيم رقم ١ في البداية هي $(1/2)v_{1i}$ وسرعة الجُسيم رقم ٢ في البداية هي $-(1/2)v_{1i}$. وفي التصادم المرن المتماثل تكون السرعة النهائية لكل جُسيم مجرد سالب سرعته الابتدائية؛ ولهذا فإنه في نظام مركز الكتلة تكون السرعة النهائية للجُسيم رقم ١ هي $-(1/2)v_{1i}$ والسرعة النهائية للجُسيم رقم ٢ هي $(1/2)v_{1i}$. لترجمة هذا بلغة الراصد الثابت نضيف $(1/2)v_{1i}$ (سرعة مركز الكتلة) إلى كلٍّ من هاتين السرعتين؛ فينتج أن $v_{1f} = 0$ و$v_{2f} = v_{1i}$.

(٣) افترض أن $m_2/m_1 \ll 1$ (كرة بولينج تصطدم مباشرةً بكرة طاولة ساكنة). هذا التصادم يسبب تغيرًا مهمَلًا في سرعة الجسم الثقيل؛ ولهذا فإن $v_{1f} = v_{1i}$، وذلك في اتفاق مع المعادلة (5-56). في هذه الحالة يكون لمركز الكتلة بصورة أساسية نفس سرعة الجسم الثقيل؛ أي إن $v_{\text{cm}} = v_{1i}$. في نظام مركز الكتلة، يقترب الجسم الخفيف من الجسم الثقيل بسرعة $-v_{1i}$، ثم يرتد (مثلما يرتد من جدار صلدٍ) بسرعة v_{1i}؛ وبناءً على ذلك، من وجهة نظر الراصد الثابت، تتفق $v_{2f} = 2v_{1i}$ مع المعادلة (5-55).

توضح المناقشة السابقة جانبًا مهمًّا من طريقة جيدة لحل المسائل. إذا كان هناك بارامتر ما متغير (مثل m_2/m_1) في المسألة، فإنه كثيرًا ما يكفي التعليل المنطقي البسيط لتوقع الإجابة بالنسبة إلى قيم خاصة معينة لذلك البارامتر. إذا كان حلُّك لا يوافق توقعاتك في هذه الحالات الخاصة، فإنه إما أن يكون حلُّك خطأً (خطأً جبريًّا أو أمرًا ما أكثر جدية؟) أو تكون توقعاتك غير سليمة.

(٥-١) السرعة النسبية في تصادمات مرنة أحادية البعد

افترض أننا نريد تحليل تصادم مرن أُحادي البُعد لا يكون الجُسيم (رقم ٢) الذي يمثل الهدف فيه ساكنًا في البداية. نستطيع إجراء الجبر، أو نذهب، إذا كنا كسالى، إلى إطار ما A' يكون الجُسيم فيه ساكنًا في البداية. في هذا الإطار يمكننا استخدام نتائج القسم [التصادمات المرنة وغير المرنة]. انتقال السرعات من الإطار A' وإعادتها إلى الإطار الأصلي (نسميه A) أمر عادي لأن السرعات في A' تختلف عن السرعات المناظرة في A بثابت جمعي (السرعة النسبية للإطارين).



شكل ٥-١٣: تصادم مرن في بعد واحد، لتبسيط التحليل، رُسمت كل السرعات في نفس الاتجاه.

إذا رمزنا للسرعتين الابتدائية والنهائية في الإطار A' بالرمزين v' و u'، فإن المعادلتين (5-55) و(5-56) تعطيان (لاحظ أن $v_2' = 0$):

$$u_2' - u_1' = \frac{v_1'}{1 + m_2/m_1} \cdot 1 + \frac{m_2}{m_1} = v_1' - v_2'. \tag{5-57}$$

لكن بما أن $u_2' - u_1' = u_2 - u_1$ و $v_2' - v_1' = v_2 - v_1$ (حيث v و u ترمزان للسرعتين الابتدائية والنهائية في الإطار A)؛ فيكون لدينا:

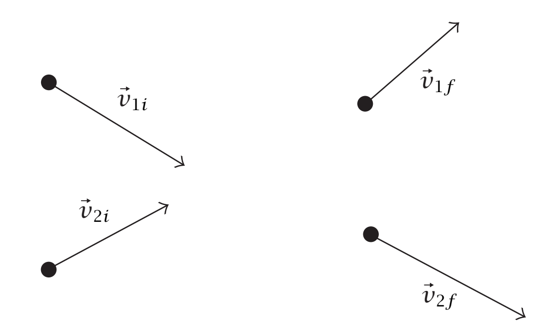
$$u_1 - u_2 = (v_2 - v_1). \tag{5-58}$$

وهكذا، في التصادم المرن أحادي البعد، تكون السرعة النسبية للجُسيمات معكوسة في الاتجاه، ولكنها لا تتغير في المقدار. هذه نتيجة مفيدة في مسائل عديدة تشمل تصادمات أحادية البعد إذا كانت طاقة الحركة محفوظة.

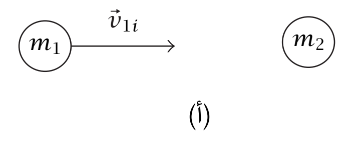
(٥-٢) تصادمات مرنة ثنائية البعد

على عكس التصادمات المرنة أحادية البُعد، الحالة النهائية في تصادم مرن ثنائي البعد لا تحدَّد فقط عن طريق حفظ الطاقة وكمية التحرك. هناك أربع كميات مجهولة في الحالة النهائية (المركبتان x و y للسرعتين $\vec{v}_{1f}$ و $\vec{v}_{2f}$، أو مقدار السرعتين واتجاهاهما). حفظ المركبتين x و y لكمية التحرك يفرض شرطين، وحفظ الطاقة يفرض شرطًا ثالثًا؛

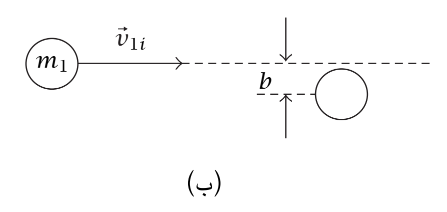
وبناءً على ذلك يوجد بارامتر حرٌّ واحد في الحالة النهائية. على سبيل المثال، إذا حددنا اتجاه $\vec{v}_{1f}$، فإنه يُحدِّد مقدار $\vec{v}_{1f}$ ومقدار واتجاه $\vec{v}_{2f}$. ما المعلومات الإضافية (زيادة على متجهي السرعة الابتدائية) التي يجب أن تتوفر لدينا بشأن الحالة الابتدائية لكي نتوقع الحالة النهائية تمامًا؟ للتبسيط، دعنا نفترض أن m_2 كانت ساكنة في البداية وأن الجسمين المتصادمين هما قرصَا هوكي الجليد. في شكل ٥-١٥(أ) و(ب)، الكرة رقم ١ لها نفس السرعة، ولكن الحالتين النهائيتين في كلٍّ من الموقفين هنا سوف تختلفان. في (أ) التصادم مباشر (مستقيم)، بينما في (ب) الكرة رقم ١ تتصادم تصادمًا غير مباشر مع رقم ٢. ولوصف الحالة الابتدائية تمامًا يجب أن نحدد إلى أي حد من الصواب استهدفت رقم ١ عند رقم ٢. يتم هذا عادةً بإعطاء قيمة بارامتر الصدْم b (انظر شكل ٥-١٥)، وهو مقدار المسافة من مركز رقم ٢ التي سوف يخطئها مركز رقم ١ إذا لم تنحرف الكرة رقم ١. قد يجد القارئ المهتم أنه من المفيد حساب $\vec{v}_{1f}$ و$\vec{v}_{2f}$ بدلالة $\vec{v}_{1i}$ وبارامتر الصدْم، لكننا نحذف الحساب هنا. الفكرة الدليلية هي أنه إذا كان سطحَا الكرتين أملسين، فإن اتجاه $\vec{v}_{2f}$ (أي اتجاه الدفع المعطى للكرة رقم ٢) يكون بطول الخط من مركز رقم ١ إلى مركز رقم ٢ في لحظة تلامس الكرتين. في البعد الواحد يكون اللاعبان بارعين تمامًا في الرماية؛ أي إن بارامتر الصدم يساوي صفرًا دائمًا.



شكل ٥-١٤: تصادم مرن في بعدين.



(أ)



(ب)

شكل ٥-١٥: تصادم جسمين لهما بارامتر صدْم.

(٦) القدرة ووحدات الشغل

الشغل له وحدات (القوة) × (المسافة). وحدة الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل (ft-lb). وفي النظام المتري تكون وحدة الشغل هي نيوتن-متر، وتسمى عادةً الجول joule. يجب أن يتحقق القارئ من أن 1 joule = .738 ft-lb.

في حالات كثيرة، يهتم المرء بالمعدَّل الذي يبذل به الشغل. على سبيل المثال، معدل قدرة حصان لمحرك ما يقيس المعدل الذي يبذل به المحرك شغلًا، فأي محرك يمكنه أداء كمية كبيرة من الشغل إذا أتيح له أن يعمل لفترة زمنية طويلة بالقدر الكافي. بالمثل، يقيس معدل الواطية لمصباح كهربي كمية الطاقة (لكل وحدة زمنية) التي يجب أن يزَوَّد بها المصباح ليظل يعمل. إذا كان المصباح يعمل بواسطة مولد بالقدرة البشرية أو البخارية، فإن المولد يجب أن يبذل شغلًا بمعدل يساوي الواطية.

معدل الشغل المبذول يسمى القدرة، وتقاس القدرة بوحدات (الشغل)/(الزمن) أو (الطاقة)/(الزمن)؛ لأن الشغل والطاقة لهما نفس الوحدات. وحدة القدرة في النظام الإنجليزي تساوي 1 ft-lb/sec. هذه الوحدة ليس لها اسم آخر، ولكن وحدة قدرة حصان واحد تساوي 550 ft-lb/sec. وبهذا فإن محركًا قدرته نصف قدرة حصان يستطيع أن يبذل شغلًا بمعدل ٢٧٥ قدمًا-رطلًا لكل ثانية. وبتوصيل تروس مناسبة إلى عمود الخرْج نستطيع استخدام المحرك ليرفع وزن ٢٥ رطلًا بمعدل 11 ft/sec أو

وزن ٥٠ رطلًا بمعدل 5.5 ft/sec، وهكذا. في النظام المتري تكون وحدة القدرة هي واحد جول/ثانية، وتسمى ١ واط. وبما أن الواط الواحد يساوي 0.738 ft-lb/sec فينتج من ذلك أن قدرة حصان واحد = ٧٤٦ واط = ٠٫٧٤٦ كيلوواط. وبما أن الواط والكيلوواط لهما وحدات (طاقة)/(زمن)، فإن الكيلوواط ساعة يمكن استخدامها كوحدة للطاقة $1\,\text{kwh} = (1000\ \text{joules/sec}) \times (3600\,\text{sec}) = 3.6 \times 10^6\ \text{joules} = 2.66 \times 10^6\ \text{ft-lb}$. (الكيلوواط ساعة الذي يدفع المستهلك في فيلادلفيا مقابلًا له مقداره ١٥ سنتا، هو الطاقة اللازمة لرفع سيارة متوسطة من الأرض إلى سطح المراقبة لمبنى الإمباير ستيت.)

يقاس محتوى الغذاء من الطاقة بوحدات السُّعرات الغذائية. السُّعر الغذائي الواحد يساوي ٤١٨٤ جول أو 3085.96003 ft-lbs. السعر (الكالوري) الغذائي يساوي ١٠٠٠ وحدة علمية كالوري. والكالوري هو كمية الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة جرام واحد من الماء بمقدار درجة واحدة مئوية. يستهلك الفرد الأمريكي متوسط العمر حوالي ٣٠٠٠ كالوري في اليوم (التقديرات تختلف)، ومعدل استهلاكه للطاقة يبلغ $(3000 \times 4184)\ \text{joules}/(24 \times 3600\,\text{sec}) = 145\ \text{watts}$. يفاد من معظم هذه الطاقة في تعزيز العمليات البيولوجية ويظهر أخيرًا في صورة حرارة يطلقها الجسم. ولهذا ربما يكون من الملائم للجامعات التي تزعجها تكاليف الطاقة العالية أن تستخدم الطلاب كمصدر كبير للحرارة في مباني الاجتماعات العامة.

متسلق الجبال سليم البنية يستطيع التسلق (على ارتفاعات منخفضة) بمعدل ٣٠٠ متر رأسي كل ساعة لبضع ساعات. إذا كانت كتلته 60 kg، فإن المعدل الذي يبذل به شغلًا مفيدًا (أي الشغل الذي يظهر كزيادة في طاقة الجهد التثاقلي بدلًا من أن يظهر كحرارة يطلقها الجسم) يساوي $(60\,\text{kg}) \times (9.8\,\text{m/s}^2) \times (300\,\text{m})/3600\,\text{sec} = 49\ \text{watts} = 0.066\,\text{hp}$. وهكذا فإن مصباحًا قدرته ٦٠ واط يكافئ مجهود إنسان صحيح الجسم طوال ساعات الدوام المعتادة. ويستطيع بعض الرياضيين أن يؤدوا شغلًا مفيدًا بمعدل قدرة حصان واحد لمدة زمنية قصيرة جدًّا (على سبيل المثال، لاعب كرة القدم الذي يزن ١٨٤ رطلًا يمكن أن يصعد درجات السلم بمعدل ثلاثة أقدام رأسية كل ثانية). إحدى الطرق الممتازة لحث نوبة قلبية هي الدفع بقوة على مؤخرة سيارة متحركة. فالدفع بقوة ٥٥ رطلًا على سيارة متحركة بسرعة ١٠ أقدام/ثانية يعادل بذل شغل بمعدل قدرة حصان واحد.

إذا أثرت قوة $\vec{F}$ على جسم وأزاحته إزاحة صغيرة $\Delta\vec{r}$ خلال فترة زمنية صغيرة Δt، فإن الشغل الذي تبذله القوة يساوي $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$ ومعدل الشغل يساوي $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}/\Delta t = \vec{F}\cdot\vec{v}$. إذا كان الجسم الذي أثرت عليه القوة عبارة عن جُسيم كتلته m، وإذا كانت $\vec{F}$ هي القوة الكلية المؤثرة على الجُسيم، فإن $\vec{F} = m\,d\vec{v}/dt$ والقدرة الكلية التي تطلقها $\vec{F}$ هي $m(d\vec{v}/dt)\cdot\vec{v} = d/dt((1/2)mv^2)$.

مثال ٥-٦ (قدرة الجُسيم). جُسيم كتلته $2\,\text{kg}$ يتحرك بطول المحور x، وموضعه في الزمن t يُعطى بالمعادلة $x = 4t + 4t^2 - t^3$؛ حيث x بالأمتار وt بالثواني. احسب القدرة اللحظية التي تُعطى للجُسيم عند $t = 1$ و$t = 2$.

السرعة هي $\vec{v} = (dx/dt)\ \hat{i} = \hat{i}(4+8t-3t^2)$ والعجلة هي $d\vec{v}/dt = (8-6t)\hat{i}$ لإيجاد قيمة $m(d\vec{v}/dt)\cdot\vec{v}$ عند $t = 1$ و$t = 2$ نجد أن القدرة اللحظية تساوي ٣٦ واط عند $t = 1$ و٦٤– عند $t = 2$. القيمة السالبة عند $t = 2$ تنتج من حقيقة أن القوة والسرعة عند تلك اللحظة لهما اتجاهان متعاكسان.

(٧) مسائل الشغل وحفظ الطاقة

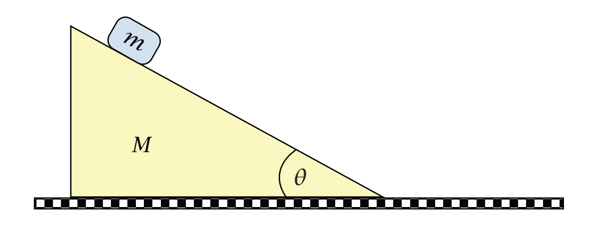
المسألة ٥-١. مضرب تنس (في يد قابضة عليه بإحكام) متحرك بسرعة مقدارها u_{racket}، يضرب كرة متحركة بسرعة u_{ball}. ما أقصى سرعة ممكنة للكرة بعد ضربها؟

المسألة ٥-٢. قالب كتلته m تحرَّر على وتد كتلته M عند ارتفاع h فوق الأرضية كما هو موضح في شكل ٥-١٦. جميع الأسطح لا احتكاكية. بيِّن أن مقدار سرعة الوتد عند ارتطام القالب بالأرضية يُعطى بالمعادلة:

$$\sqrt{\frac{2m^2gh\cos^2\theta}{(M+m)\left(M+m\sin^2\theta\right)}}. \qquad (5\text{–}59)$$

[استخدم في الحل مبدأ حفظ الطاقة وكمية التحرك.]

المسألة ٥-٣. قافز بالحبال (كتلته $80.0\,\text{kg}$) يقفز من جسر عالٍ، وحبل التسلق مهمل الكتلة. أحد طرفَي الحبل مربوط بالجسر، والطرف الآخر مربوط بعُدَّة القافز. الطول



شكل ٥-١٦: المسألة ٥-٢.

غير المطوط للحبل $50.0\,\text{m}$، وعندما يمتد إلى $50.0 + x$ فإنه يبذل قوة استرداد مقدارها kx (وهذا ما يسمى قانون هوك)؛ حيث $k = 200\,\text{N/m}$.

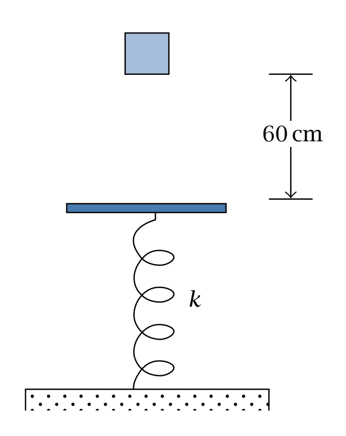
(أ) على أي بُعد أسفل الجسر يبلغ القافز أقصى سرعة؟
(ب) احسب أقصى سرعة.
(جـ) على أي بُعد أسفل الجسر يبلغ القافز أقصى عجلة؟
(د) احسب أقصى عجلة.
(هـ) احسب أقصى بُعد للقافز عن الجسر.

المسألة ٥-٤. إذا ضاعفت طول الحبل الذي يخضع لقانون هوك، فإن ثابت قانون هوك (k) ينقص بمعامل ٢. والأكثر عمومية (وضح هذا)، إذا كان K هو ثابت قانون هوك لحبل طوله الوحدة، فإن ثابت قانون هوك لحبل طوله غير المطوط L هو $k = K/L$. إذا كنت قافز حبال تستخدم حبلًا يتبع قانون هوك طوله غير المطوط L (أحد طرفيه مربوط بالجسر والطرف الآخر مربوط بُعدَّتك) فوضِّح أن أقصى شد لاحق في الحبل لا يعتمد على L. (افترض أن كتلة الحبل مهملة مقارنةً بكتلتك، ومن ثم يمكن إهمالها كليًّا).

المسألة ٥-٥. أثبت أنه إذا كان التصادم يحفظ كمية التحرك وطاقة الحركة في إطار قصوري A، فإنه أيضًا يحفظ الطاقة وكمية التحرك في أي نظام قصوري A'. (لاحظ أنه إذا كان لنقطة أصل الإطار A' سرعة $\vec{V}$ كما قيست في إطار A، فإنه إذا قاس راصدان في الإطارين سرعة نفس الجُسيم، تكون العلاقة بين قياساتهما هي $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$).

المسألة ٥-٦. أثبت أنه إذا تصادم جُسيم تصادمًا مرنًا مع جُسيم آخر له نفس الكتلة، وكان جُسيم الهدف ساكنًا في البداية، فإن السرعتين التاليتين للجُسيمين تتعامدان إحداهما على الأخرى.

المسألة ٥-٧. في الشكل ٥-١٧ أُسقط قالب كتلته ٥٠٠ جرام من ارتفاع ٦٠سم فوق قمة منصة كتلتها ١ كيلوجرام. المنصة تستقر فوق زنبرك مصفوف رأسيًّا وثابتُه $k = 120\,\text{N/m}$. بفرض أن القالب يتصادم تصادمًا غير مرن تمامًا مع المنصة، أوجد أقصى انضغاط للزنبرك.



شكل ٥-١٧: المسألة ٥-٧.

المسألة ٥-٨. كوكبان، كلاهما كتلته M وتفصلهما مسافة D. سرعتهما النسبية يمكن إهمالها، وكلاهما ساكن في إطار قصوري. يعرَّف جهد الجاذبية التثاقلية $u(\vec{r})$ بأنه طاقة جهد الجاذبية لجُسيم كتلته الوحدة عندما يكون في الموضع $\vec{r}$. وفي وجود الكوكبين الموضوعين عند $\vec{R}_1$ و$\vec{R}_2$، يكون الجهد:

$$u\left(\vec{r}\right) = -\frac{GM}{\left|\vec{R}_1 - \vec{r}\right|} - \frac{GM}{\left|\vec{R}_2 - \vec{r}\right|}. \qquad (5\text{-}60)$$

هذه المسألة تحدث بعيدًا في الفضاء. لا يوجد أي أجسام أخرى ضخمة الكتلة بالقرب من الكوكبين:

(أ) ارسم مخططًا صحيحًا نوعيًّا للسرعة u كدالَّة في الموضع بطول الخط بين الكوكبين.

(ب) هناك محطتان فضائيتان ألفا وبيتا موضوعتان على الخط بين الكوكبين. كلٌّ من المحطتين في سكون بالنسبة إلى الكوكبين. ألْفَا تبعد مسافة $D/4$ من الكوكب رقم ١ وبيتا تبعد مسافة $D/3$ من الكوكب رقم ٢. أُطلق مقذوف كتلته m من المحطة ألفا، يتجه مباشرة بسرعة $\vec{v}$ نحو الكوكب رقم ٢. ما أقل سرعة v تسمح للمقذوف أن يصل إلى المحطة بيتا؟

الفصل السادس

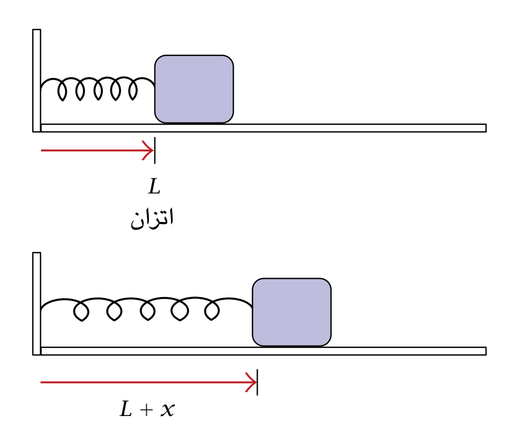
الحركة التوافقية البسيطة

الذبذبات من الظواهر الشائعة التي نتعامل معها. سبق أن ناقشنا حركة بندول (الفصل الخامس، مثال ٥-٣). أحد الأمثلة الأخرى، التي (سوف نراها) تكون مماثلة رياضيًّا لذبذبات بندول صغيرة، هي الذبذبات الرأسية لكتلة معلقة من السقف بواسطة زنبرك. ومثال آخر أعقد قليلًا هو حركة المقعد الهزاز، وآخر أكثر تعقيدًا هو وتر الكمان. العامل المشترك لهذه الأمثلة أن نظامًا دُفِع به في البداية بطريقة ما بعيدًا عن ترتيبه المُتَّزن؛ ومع ذلك، فإن القوى المؤثرة على النظام تُعيده نحو الترتيب المتَّزن. وعندما يصل النظام إلى الترتيب المتزن يكون له سرعة محددة وبالتالي يتخطاه إلى الجانب الآخر، وبمجرد أن يصل إلى الجانب الآخر، تتجه القوى مرة أخرى نحو الترتيب المتزن الذي يعود إليه في النهاية، ثم يجتازه في الاتجاه العكسي، وهكذا.

(١) قانون هوك والمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة

حركة جُسيم تحت تأثير قوة يتناسب مقدارها مع بعد الجُسيم عن موضع اتزانه واتجاهها دائمًا نحو موضع الاتزان تُسمى حركة توافقية بسيطة. دعنا نعتبر، مثلًا، جُسيمًا متحركًا في بعد واحد على سطحٍ أفقيٍّ أملس. وكان زنبرك ما مربوطًا بالجُسيم ونهايته الأخرى مربوطة في حائط كما في شكل ٦-١.

ليكن طول الاتزان للزنبرك L، والطول الفعلي للزنبرك عند لحظة معينة $L + x$. من المفترض أنه في حالة الاتزان تكون ملفات الزنبرك مفتوحة جزئيًّا بحيث يمكن أن تكون x إما موجبة أو سالبة. إذا كانت x موجبة فإن الزنبرك يؤثر بقوة نحو اليسار، وإذا كانت x سالبة فإن الزنبرك يؤثر بقوة نحو اليمين. الزنبرك المثالي يتبع قانون



شكل ٦-١: تعريف الاتزان في الحركة التوافقية البسيطة.

هوك، الذي ينص على أن مقدار القوة يتناسب مع مقدار x. إذا استخدمنا متجه وحدة $\hat{i}$ يشير نحو الاتجاه الذي يبتعد عن الحائط، وكانت القوة التي يؤثر بها الزنبرك على الجُسيم $F\hat{i}$، فإن التعبير الكمي لقانون هوك هو:

$$F = -kx, \tag{6-1}$$

حيث k ثابت يسمى ثابت الزنبرك. الإشارة السالبة في المعادلة (6-1) تؤكد أنه إذا كانت x موجبة (سالبة)، فإن القوة تتجه نحو اليسار (اليمين).

قانون هوك (على عكس قوانين نيوتن) ليس قانونًا جوهريًّا في الطبيعة، لكن معظم الزنبركات تتبع قانون هوك إذا كانت x صغيرة بقدر كافٍ، وتحيد جميع الزنبركات عن قانون هوك إذا تمددت أو انضغطت بقدر كبير جدًّا. سوف نفترض أن مقدار x صغير بما يكفي لأن يكون قانون هوك صالحًا. وحيث إن عجلة الجُسيم $d^2x/dt^2\hat{i}$، فإن قانون نيوتن الثاني يؤدي إلى:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{6-2}$$

المعادلة (6-2)، بالإضافة إلى الظروف الابتدائية (الموضعِ والسرعةِ الابتدائيين؛ أي مقداري x وdx/dt عند $t = 0$)، تحدد على نحو تام الحركة التابعة. رياضيًّا، مشكلتنا هي

إيجاد دالة $x(t)$ تحقق المعادلة (6-2) (تسمى «معادلة تفاضلية») مبنية على قيمتين محددتين سالفًا لـ x وdx/dt عند $t = 0$.

مثال ٦-١ (استطراد رياضياتي). لتوضيح أن المعادلة (6-2) بالإضافة إلى قيمتين ابتدائيتين محددتين لـ x وdx/dt، تحدد على نحو فريد $x(t)$، يمكننا تخيل حل المعادلة (6-2) عدديًّا. لتكن ε زيادة زمنية طفيفة جدًّا، ونجعل (من أجل تسهيل الترميز) v تشير إلى dx/dt وa تشير إلى d^2x/dt^2. وحيث إن $x(0)$ و$v(0)$ معلومتان، يمكننا حساب $x(\varepsilon)$ و$v(\varepsilon)$ باستخدام $x(\varepsilon) = x(0) + v(0)\varepsilon$ و$v(\varepsilon) = v(0) + a(0)\varepsilon$؛ حيث تعطينا المعادلة (6-2) قيمة $a(0)$ بمعرفة $x(0)$. نعلم الآن قيمتي $x(\varepsilon)$ و$v(\varepsilon)$ و(باستخدام المعادلة (6-2)) $a(\varepsilon)$. نستطيع الآن حساب $x(2\varepsilon)$ و$v(2\varepsilon)$ و$a(2\varepsilon)$ باستخدام $x(2\varepsilon) = x(\varepsilon) + v(\varepsilon)\varepsilon$ و$v(2\varepsilon) = v(\varepsilon) + a(\varepsilon)\varepsilon$؛ وبذلك نستطيع أن نتقدم بزيادات زمنية طفيفة. يمكن استخدام هذا الإجراء لحل معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية (معادلة تكون المشتقة الأعلى درجة بها مشتقةً ثانيةً) عدديًّا حتى عندما لا نستطيع إيجاد حل بدلالة دوالَّ مألوفة.

(٢) الحل باستخدام حساب التفاضل والتكامل

يمكن حل المسألة الرياضياتية بواسطة عدة طرق مختلفة، سنقوم بمناقشتها الآن. نعيد كتابة المعادلة (6-2) على الصورة:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x, \tag{6-3}$$

حيث $\omega = \sqrt{k/m}$ (ω هو الحرف اليوناني الصغير «أوميجا»). إحدى الطرق المشروعة تمامًا (مع أنها غير مُمنهجة جدًّا) لحل المعادلة (6-3) هي تخمين الحل، ثم برهنة أن التخمين يحقق المعادلة (6-3). أظهرنا في النقاش السابق أننا نتوقع أن تكون x دالة متذبذبة في الزمن t. أبسط دالة متذبذبة مألوفة بالنسبة لنا هي $\sin t$. ولأن $d/dt(\sin t) = \cos t$ و$d/dt(\cos t) = -\sin t$، فيكون لدينا $d^2/dt^2(\sin t) = -\sin t$؛ وبذلك نرى أن $\sin t$ تحقق تقريبًا المعادلة (6-3)، وصولًا إلى المُعامل ω^2. يمكن إصلاح ذلك بسهولة عن طريق تجريب الدالة $\sin \omega t$. حيث

إن $d/dt(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t$ و$d/dt(\cos\omega t) = -\omega\sin(\omega t)$، فيكون لدينا $d^2/dt^2(\sin\omega t) = -\omega^2\sin\omega t$؛ وبالتالي نجد أن الدالة $x(t) = \sin\omega t$ تحقق المعادلة (6-3). نجد بالمثل أن $x(t) = \cos\omega t$ تحقق أيضًا المعادلة (6-3). وهذا ليس غريبًا لأن الرسم البياني لـ $\cos\omega t$ هو تمامًا نفس الرسم البياني لـ $\sin\omega t$ مع إزاحة نقطة الأصل لمحور الزمن؛ أي $\cos\omega t = \sin\omega(t + \pi/2\omega)$. في النهاية نصل إلى أن الدالة:

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \quad (6\text{–}4)$$

تحقق المعادلة (6-3)، وأنها، في الواقع، حلها الأعم.

باختيار A وB على نحو مناسب يمكننا جعل x وdx/dt تأخذان قيمتين محددتين سالفًا عند $t = 0$. افترض أننا نريد أن تأخذ x القيمة x_0 وأن تأخذ dx/dt القيمة v_0 عند $t = 0$ (يمكننا فيزيائيًّا جعل كلٍّ من x_0 وv_0 تأخذ أي قيمة مرغوبة إذا بدأنا الحركة «باستخدام الأيدي» ثم تركناها تتحرك). بجعل $t = 0$ في المعادلة (6-4) نجد $B = x_0$. وبتفاضل المعادلة (6-4) بالنسبة للزمن، نحصل على:

$$\frac{dx}{dt} = \omega A\cos\omega t - \omega B\sin\omega t. \quad (6\text{–}5)$$

وبذلك تكون قيمتا A وB المناسبتان للظروف الأولية هما $B = x_0$ و$A = v_0/\omega$، ونحصل على:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t + x_0\cos\omega t. \quad (6\text{–}6)$$

لاحظ أنه إذا كانت $x_0 = 0$، فإن الإزاحة $x(t)$ تتناسب مع $\sin\omega t$، وإذا كانت $v_0 = 0$، فإن الإزاحة تتناسب مع $\cos\omega t$ (رأينا هذا بالفعل في مناقشتنا للذبذبات الصغيرة لبندول (مثال ٥-٣)). حتى إذا كانت $x_0 \neq 0$ و$v_0 \neq 0$، فلا زلنا نستطيع، بإزاحة مناسبة لنقطة الأصل على المحور الزمني، إظهار $x(t)$ كدالَّة صرفة للجيب أو جيب التمام. لتحقيق هذا نكتب المعادلة (6-4) على الصورة:

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\sin\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\cos\omega t\right], \quad (6\text{–}7)$$

حيث يكون مفهومًا أننا نختار دائمًا الجذر التربيعي الموجب. يوجد لقيم معينة لكل من A وB زاوية فريدة δ في المدى $-\pi < \delta \leq \pi$ بحيث:

$$\cos\delta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{6-8}$$

$$\sin\delta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{6-9}$$

لاحظ أن المعادلتين (6-8) و(6-9) متَّسقتان مع المتطابقة الرياضياتية $\cos^2\delta + \sin^2\delta = 1$. من الرسم البياني لكل من $\cos\delta$ و$\sin\delta$ نجد أنه:

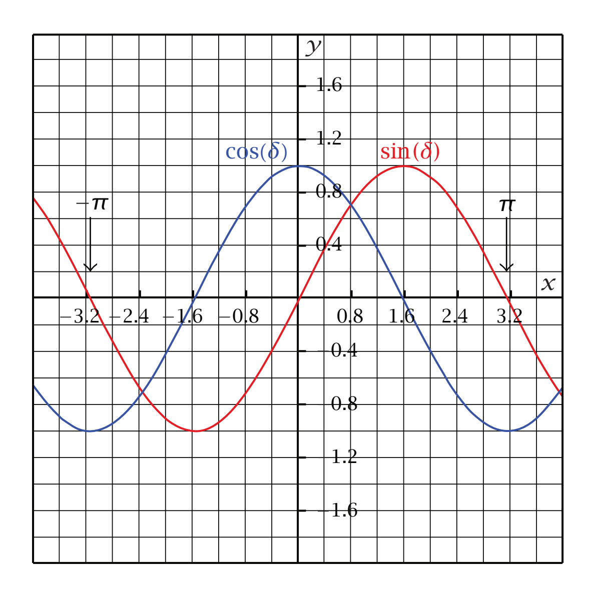
إذا كان $A > 0$، و$B > 0$ فإن $0 < \delta < \pi/2$.
إذا كان $A > 0$، و$B < 0$ فإن $\pi/2 < \delta < \pi$.
إذا كان $A < 0$، و$B > 0$ فإن $-\pi/2 < \delta < 0$.
إذا كان $A < 0$، و$B < 0$ فإن $-\pi < \delta < -\pi/2$.

باستخدام المعادلتين (6-8) و(6-9) يمكننا كتابة المعادلة (6-7) على الصورة:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{A^2 + B^2}\,[\sin\omega t \sin\delta + \cos\omega t \cos\delta] \\ &= \sqrt{A^2 + B^2}\cos(\omega t - \delta), \end{aligned} \tag{6-10}$$

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\cos\omega\left(t - \frac{\delta}{\omega}\right).$$

وإذا جعلنا $t' = t - \delta/\omega$، فإن x تكون متناسبة مع $\cos\omega t'$. تحويل المتغير من t إلى t' يناظر تحريك نقطة الأصل على المحور الزمني بمقدار δ/ω؛ أي إن $t' = 0$ عند $t = \delta/\omega$. إن أهمية δ/ω أنها الزمن عندما تكون $x(t)$ عند قيمتها العظمى الموجبة؛ (لأن جيب التمام في المعادلة (6-10) تكون قيمته 1+ عند $t = \delta/\omega$)؛ وبذلك نرى أننا إذا قسنا الزمن من اللحظة التي تكون فيها x عند قيمتها العظمى الموجبة، فإن الإزاحة تكون دالة صرفة في جيب التمام. واضح من المعادلة (6-7) أو المعادلة (6-10) أن $x(t)$ دالة دورية زمنها الدوري $T = 2\pi/\omega$؛ أي $x(t + 2\pi/\omega) = x(t)$؛ وبذلك تحقق x قيمتها العظمى الموجبة، ليس فقط عند زمن δ/ω، ولكن أيضًا عند



شكل ٦-٢: جيب التمام والجيب لزاوية طوْر الحركة التوافقية البسيطة.

الأزمنة $\delta/\omega \pm 2\pi/\omega$، $\delta/\omega \pm 4\pi/\omega$، وهكذا. عدد الذبذبات في الثانية (التردد) هو $f = 1/T = \omega/2\pi$. نلاحظ أيضًا أن ω تسمى التردد الزاوي.

لا بد أنه قد اتضح الآن أننا إذا قسنا الزمن من اللحظة التي عندها $x = 0$ وdx/dt موجبة (أي اللحظة التي يمر عندها الجُسيم بموضع اتزانه، متحركًا نحو اليمين)، فإن الإزاحة تكون دالة صرفة في الجيب. لبرهنة ذلك نلاحظ أن $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ ونعيد كتابة المعادلة (6-10) لتصبح على الصورة:

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \omega \left(t - \frac{\delta - \pi/2}{\omega} \right). \tag{6-11}$$

وبذلك نرى أن $x = 0$ و$dx/dt > 0$ عند:

$$t = \frac{\delta - \pi/2}{\omega}, \qquad \frac{\delta - \pi/2}{\omega} \pm \frac{2\pi}{\omega}, \qquad \frac{\delta - \pi/2}{\omega} \pm \frac{4\pi}{\omega}, \quad \text{and so forth.} \tag{6-12}$$

تسمى قيمة x العظمى سعة الذبذبة. وبإدخال قيمتي A وB المحسوبتين نجد:

$$x_{\max} = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}. \qquad (6\text{–}13)$$

مثال ٦–٢ (انظر شكل ٦-١). طول اتزان الزنبرك ١ متر وكتلته ٠٫١٠٠ كيلوجرام. ثابت الزنبرك $k = 4.00\ \mathrm{N/m}$. تكون الكتلة عند $t = 0$ على بعد $0.800\,\mathrm{m}$ من الحائط ولها سرعة مقدارها $0.700\,\mathrm{m/s}$ نحو اليسار. احسب (أ) التردد الزاوي ω للذبذبات. (ب) الزمن الدوري للذبذبات. (ج) سعة الذبذبة. (د) أقصى وأقل مسافة من الحائط تصل إليها الكتلة. (هـ) الزمن الذي تكون عنده الكتلة أقرب ما يمكن إلى الحائط (احسب أصغر قيمة ممكنة لهذا الزمن). (و) الزمن الذي تكون عنده الكتلة لأول مرة على مسافة $1.10\,\mathrm{m}$ من الحائط، متحركة نحو اليسار.

الحل. التردد الزاوي $\omega = \sqrt{k/m} = 6.33\,\mathrm{s}^{-1}$. الزمن الدوري $T = 2\pi/\omega = 0.993\,\mathrm{s}$. السعة معطاة بالمعادلة (6–13). لاحظ أن $x_0 = -0.200\,\mathrm{m}$؛ لأن الكتلة كانت في البداية عند $0.200\,\mathrm{m}$ على يسار موضع اتزانها؛ وبذلك تكون $x_{\max} = \sqrt{(.700/6.33)^2 + (.200)^2} = .229\,\mathrm{m}$. أقصى مسافة للكتلة بالنسبة للحائط هي $1.00 + .229 = 1.23\,\mathrm{m}$. أقل مسافة هي $1.0 - .229 = 0.771\,\mathrm{m}$.

لدينا من المعادلة (6–6) $A = -.1107\,\mathrm{m}$ و$B = -.200\,\mathrm{m}$؛ وبالتالي فإن $\sin\delta = -.483$ من المعادلة (6–9). وحيث إن $A < 0$ و$B < 0$، فإن الزاوية δ تكون في المدى $-\pi < \delta < -\pi/2$؛ وبذلك تكون $\delta = -2.638$ radians و$\delta/\omega = -0.4168\,\mathrm{s}$ (التقدير الدائري radians هو كمية لابُعْدية لأنه نسبة بين طولين). في النهاية، يكون لدينا من المعادلة (6–10)

$$x(t) = .229\cos\left[6.325\,(t + .4167)\right]. \qquad (6\text{–}14)$$

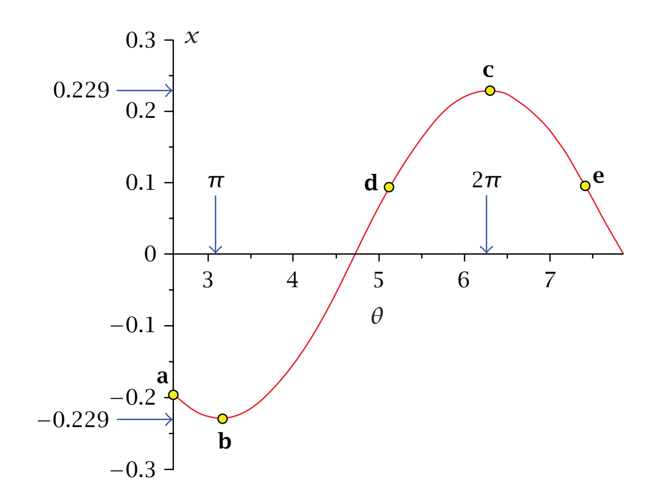
تكون الكتلة أقرب إلى الحائط عندما تكون x عند قيمتها العظمى السالبة؛ أي إن $6.325(t+.4167) = \pi, 3\pi, 4\pi$ وهكذا، ونحصل على أصغر قيمة ممكنة للزمن بوضع متغير جيب التمام يساوي π؛ وبذلك نجد أن $t = \pi/6.325 - .4167 = 0.080\,\mathrm{s}$. وتكون الكتلة أبعد ما يكون عن الحائط بعد مرور نصف الزمن الدوري؛ أي عند $t = 0.080 + .993/2 = .577\,\mathrm{s}$. من المفيد رسم مخطط بياني للمعادلة (6–14)

عند الإجابة على (هـ) و(و). كما يظهر في شكل ٦-٣، رسمنا مخططًا بيانيًّا للمعادلة $x = .229\cos\theta$؛ حيث $\theta = 6.325(t + .4167)$. لاحظ أن $\theta = 2.6356$ radians عند $t = 0$. ورغم أن هذا الرسم البياني يمكن إجراؤه بسهولة باستخدام كمبيوتر، فإن هناك قيمة تعليمية وراء رسم المعادلة (6-14) بيانيًّا بالأيدي بمساعدة آلة حاسبة؛ لأنها تفرض علينا فهم أي الأجزاء من منحنى جيب التمام له صلة بالمسألة. فمثلًا: النقطة **a** على المنحنى تُمثِّل موضع الكتلة عند $t = 0$. وتكون الكتلة أقرب ما يمكن إلى الحائط عند النقطة **b** وأبعد ما يمكن عند النقطة **c**. عند النقطة **d** تكون الكتلة على بعد 1.10 m من الحائط ($x = 0.1$ m) متحركة نحو اليمين؛ وبذلك يكون عند **d**، $\cos\theta = 0.1/.229 = .4367$. تُبين الآلة الحاسبة أن $\cos^{-1}(0.4367) = 1.119$ rad. وبما أن $\cos(x) = \cos(-x)$، يكون لدينا $\cos(1.119) = \cos(-1.119) = .4367$. بالطبع أيضًا، $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$. لا بد أن تكون قيمة θ عند النقطة **d** بين 1.5π و2π؛ وبذلك يكون عند النقطة **d**، $\theta = -1.119 + 2\pi = 5.1642$. وبوضع $6.325(t + .4167) = 5.1642$، نجد أن $t = .400$ s (وهي إجابة (هـ)). بالمثل، عند النقطة **e** تكون الكتلة على بعد 1.10 m من الحائط متحركة نحو اليسار. نرى من الرسم البياني أن θ لا بد أن تقع بين 2π و2.5π؛ وبالتالي تكون $\theta = 1.119 + 2\pi = 7.4022$ rad، و$t = .754$ s (وهي إجابة (و)). لاحظ أن الزمن عندما تكون الكتلة أبعد ما يمكن عن الحائط يقع في منتصف الفترة بين $t(\mathbf{c})$ $t(\mathbf{d})$ و$t(\mathbf{e})$، كما هو متوَقَّع.

(٣) الحل الهندسي للمعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة، دائرة المرجع

يمكن حل المعادلة التفاضلية (معادلة (6-2)) بدون حساب التفاضل باستخدام إنشاء هندسي بسيط. ولأن هدفنا في هذا القسم هو الإحجام عن استخدام حساب التفاضل، فإننا نستبدل a_x بدلًا من d^2x/dt^2 (قد يبدو الرمز السفلي x غير ضروري لكنه سيساعد في تجنب الالتباس اللاحق). مشكلتنا هي إيجاد حركة جُسيم على المحور x، بمعلومية أن العجلة تتناسب مع سالب الإزاحة؛ أي إن:

$$a_x = -\omega^2 x, \quad \text{where } \omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{6-15}$$



شكل ٦-٣: رسم بياني للإزاحة الأفقية للكتلة في شكل ٦-١ بمعلومية الظروف المنصوص عليها في مثال ٦-٢.

نتذكر من الفصل الأول أن الجُسيم المتحرك في دائرة نصف قطرها r بمقدار سرعة ثابت v يكون متجه عجلته:

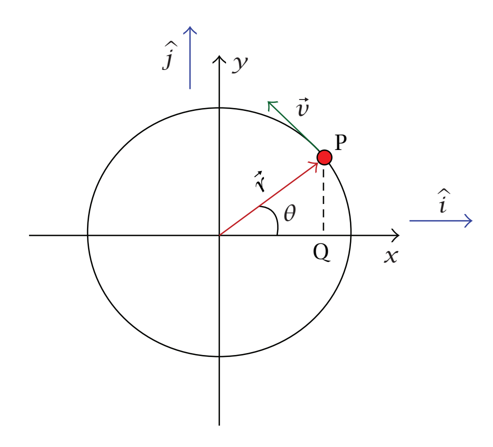
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r} = -\frac{v^2}{r^2}\vec{r}, \tag{6-16}$$

حيث $\vec{r}$ هو المتجه من مركز الدائرة إلى الموضع اللحظي للجُسيم و$\hat{r} = \vec{r}/r$ هو متجه الوحدة في نفس اتجاه $\vec{r}$. إذا كانت الدائرة في المستوى x-y، فإن $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ وينتج من المعادلة (6-16) أن:

$$a_x = -\left(\frac{v}{r}\right)^2 x. \tag{6-17}$$

دعنا نختار v وr بحيث تكون النسبة v/r مساوية لـ ω في المعادلة (6-15)، ولذلك تصبح المعادلة (6-17) مماثلة للمعادلة (6-15). وبما أن v/r هي السرعة الزاوية (وهي الإزاحة الزاوية لوحدة الزمن، مَقيسة بوحدة التقدير الدائري لكل ثانية) للجُسيم المتحرك حول الدائرة، نرى أن السرعة الزاوية تساوي ω.

ليكن P الموضع اللحظي لجُسيمنا على الدائرة، ودعنا نسقط خطًّا عموديًّا من P على المحور x، ليقطع المحور x عند النقطة Q. إذن، بما أن عجلة Q على المحور x هي a_x، نرى أن حركة Q تحقق المعادلة (6–15). بإيجاز، إذا أُسقِطت الحركة الدائرية المنتظمة على خط، تكون الحركة الخطية الناتجة حركة توافقية بسيطة. (الادعاء بأن هذه المناقشة لا تعتمد على حساب التفاضل ليس صحيحًا تمامًا؛ لأن اشتقاق المعادلة (6–16)، المسئولة عن إنشاء الفرق بين متجهي السرعة عند زمنين قريبين أحدهما على الآخر من بعض والقسمة على الفارق الزمني، هو حساب تفاضل.) تسمى الدائرة دائرة المرجع، وهي بناء رياضياتي صرف.



شكل ٦-٤: صياغة الحل البياني للحركة التوافقية البسيطة.

بالاختيار المناسب لنصف قطر دائرة المرجع والموضع الابتدائي P للجُسيم على دائرة المرجع، يمكننا أن نجعل Q تأخذ أي موضع وسرعة ابتدائيين مرغوبين. الإحداثي x لـ P هو $r\cos\theta$؛ حيث θ الزاوية بين $\vec{r}$ والمحور x (انظر الشكل ٦-٤). إذا كانت قيمة θ عند $t = 0$ هي $-\delta$ (هذا هو تعريف δ)، وإذا كانت P تتحرك حول الدائرة في عكس اتجاه عقارب الساعة بسرعة زاوية ω؛ فإن $\theta = \omega t - \delta$؛ وبالتالي يكون:

$$x = r\cos(\omega t - \delta)\,. \qquad (6\text{–}18)$$

سرعة النقطة P تكون في اتجاه المماس للدائرة ومقدارها $v = r\omega$. والمركبة x لسرعة P، وهي سرعة Q، تكون (انظر شكل ٦-٤):

$$v_x = -v\sin\theta = -r\omega\sin(\omega t - \delta)\,. \tag{6–19}$$

لاحظ أنه كان باستطاعتنا الحصول على المعادلة (6–19) عن طريق تفاضل المعادلة (6–18) بالنسبة إلى الزمن، ولكننا نستخدم الهندسة في هذا القسم وليس حساب التفاضل.

بوضع $t = 0$ في المعادلتين (6–18) و(6–19) نحصل على $x_0 = r\cos\delta$ و$v_0 = r\omega\sin\delta$ (استخدمنا $\cos(-\delta) = \cos\delta$ و$\sin(-\delta) = -\sin(\delta)$)؛ حيث x_0 وv_0 الإزاحة والسرعة الابتدائيتان؛ وبالتالي فإن:

$$x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = r^2 \tag{6–20}$$

وهي مماثلة للمعادلة (6–13)؛ لأن $x_{\text{max}} = r$ كما هو واضح. تُعَيَّن الزاوية δ بواسطة المعادلتين:

$$\cos\delta = \frac{x_0}{r} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}},$$
$$\sin\delta = \frac{(v_0/\omega)}{\sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}} \tag{6–21}$$

وهما مماثلتان للمعادلتين (6–8) و(6–9). وبذلك نكون حصلنا على جميع معادلات القسم السابق.

من المفيد تعليميًّا رسم المنحنى البياني السليم نوعيًّا لكل من x، وv_x، وa_x مقابل t عن طريق تخيل حركة النقطة P على دائرة المرجع. لا بد أن تقارن رسوماتك البيانية مع المعادلتين (6–18) و(6–19). اجعل $t = 0$ في اللحظة التي عندها $x = x_{\text{max}}$؛ أي إن $\theta = 0$. ينبغي أن يكون واضحًا أن مقدار السرعة يكون صفرًا عند $x = \pm x_{\text{max}}$ ويكون مقدار السرعة أكبر ما يمكن عند $x = 0$.

(٤) اعتبارات الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة

إذا كانت القوة على جُسيم هي $\vec{F} = -kx\hat{i}$، فإن الشغل المبذول على الجُسيم عندما يتحرك من x_0 إلى x_f هو (اعتبر المسار متتالية من خطوات صغيرة $dx\hat{i}$):

$$W = -k\int_{x_0}^{x_f} x\,dx = -\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \qquad (6\text{–}22)$$

(لاحظ أن القوة محافظة؛ لأن الشغل يعتمد فقط على نقطتي البداية والنهاية ولا يعتمد على ما إذا كان الجُسيم تحرك مباشرة من x_0 إلى x_f أو تراجع في مساره.)

تنص نظرية الشغل والطاقة على:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}kx_0^2; \qquad (6\text{–}23)$$

أي إن:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constant} = E. \qquad (6\text{–}24)$$

المعادلة (6–24) متضَمَّنة بالفعل في حلنا السابق. تذكر أن $x = x_{\max}\cos(\omega t - \delta)$، و$v = -\omega x_{\max}\sin(\omega t - \delta)$. باستخدام $\omega^2 = k/m$ و$\sin^2\delta + \cos^2\delta = 1$، نحصل على:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_{\max}^2. \qquad (6\text{–}25)$$

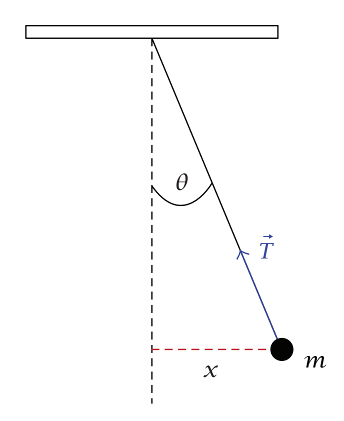
ولأن $v_{\max} = \omega x_{\max}$، يمكننا كتابة الطاقة على الصورة $(1/2)mv_{\max}^2$ أو $(1/2)kx_{\max}^2$. ندرك أن $(1/2)kx_{\max}^2$ هي طاقة الجهد عندما تكون نقطة المرجع هي موضع الاتزان $(x = 0)$. التعبيران السابقان للطاقة يناظران حالتي وجود الجُسيم عند $x = 0$، عندما تكون طاقة حركته قيمة عظمى ولا يكون له طاقة جهد، أو $x = \pm x_{\max}$ عندما تكون طاقة جهده قيمة عظمى ولا يكون له طاقة حركة.

أي شخص لم يسمع قط عن الطاقة ولديه رؤية رياضياتية قد يدرك أنك إذا قمت بضرب طرفي المعادلة (6–2) في dx/dt تحصل على $d/dt((1/2)mv^2 + (1/2)kx^2) = 0$، وهي مماثلة للمعادلة (6–24). الأكثر من ذلك، إذا كان x_0 وv_0 معينين فإن المعادلة (6–24) تعطي v كدالة في x. وبما أن $dt = dx/v(x)$، فيمكنك إجراء التكامل

للطرفين للحصول على $t(x)$ وبالتالي $x(t)$. تفاصيل هذا الحساب مماثلة (مع اختلاف الرموز) لمناقشتنا (مثال ٥-٣) للذبذبات الصغيرة لبندول.

(٥) تذبذبات صغيرة لبندول

لقد ناقشنا بالفعل الذبذبات الصغيرة لبندول بواسطة اعتبارات الطاقة (مثال ٥-٣) وحصلنا على صيغة صريحة للزمن الدوري والإزاحة الزاوية θ كدالة في الزمن t. من إعادة فحص سريعة لهذه المسألة يتبين لنا (إذا كانت $\theta_{\max}$ صغيرة) أنها مثال لحركة توافقية بسيطة.

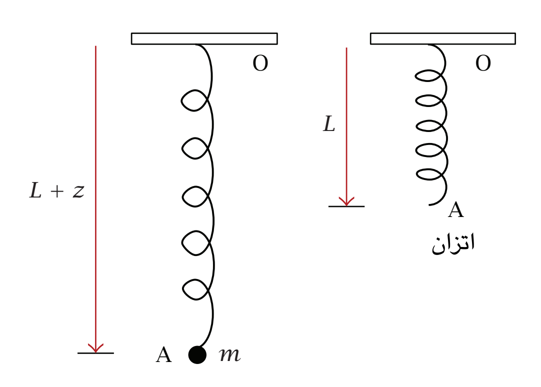


شكل ٦-٥: بندول ذو سعة ذبذبة صغيرة يخضع لحركة توافقية بسيطة.

إذا كان البندول كتلة نقطية مربوطة في السقف بواسطة وتر طوله L، فإن القوتين الوحيدتين المؤثرتين على m هما قوة شد الوتر $\vec{T}$ وقوة الجاذبية $m\vec{g}$. إذا كانت سعة الذبذبة صغيرة، فإن $T \simeq mg$. مركبة $\vec{F} = m\vec{a}$ الأفقية هي $md^2x/dt^2 = -T\sin\theta$. باستخدام العلاقة الهندسية $\sin\theta = x/L$ و$T \simeq mg$ نجد أن:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{mg}{L}\right)x. \tag{6-26}$$

المعادلة (6–26) لها نفس شكل المعادلة (6–2)، مع استبدال mg/L بثابت الزنبرك k؛ وبذلك تكون الحركة الأفقية للبندول ذي الذبذبات الصغيرة هي حركة توافقية بسيطة لها $\omega = \sqrt{g/L}$ وزمن دوري $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{L/g}$ لا يعتمد على السعة (بشرط أن تكون السعة صغيرة). التردد الزاوي ω لا يعتمد على الكتلة؛ لأن «ثابت الزنبرك» يتناسب مع m.



شكل ٦-٦: جُسيم كتلته m معلق على زنبرك رأسي في مثال ٦-٣.

مثال ٦–٣ (زنبرك يتذبذب في الاتجاه الرأسي). زنبرك منعدم الكتلة OA له طول اتزان L وثابت زنبرك k. الزنبرك معلق رأسيًّا بحيث تكون O مربوطة في السقف وكتلة m مربوطة عند A. أوجد التردد الذي سوف تتذبذب به الكتلة إذا أزيحت عن موضع اتزانها.

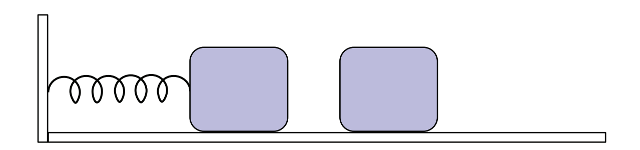
الحل. ليكن الطول اللحظي للزنبرك $L + z$ وليكن $\hat{e}$ متجه وحدة مشيرًا لأسفل. يؤثر الزنبرك بقوة $-kz\hat{e}$ على الكتلة كما أن قوة الجاذبية على الكتلة هي $mg\hat{e}$. عجلة الكتلة هي $d^2z/dt^2\hat{e}$ وبالتالي يكون:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -kz + mg. \tag{6–27}$$

إذا عرَّفنا $u = z - mg/k$ (لاحظ أن u هي بعد الكتلة عن موضع اتزانها بحيث تناظر قيم u الموجبة النقاط أسفل موضع الاتزان)؛ إذن:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku. \tag{6-28}$$

المعادلة (6-28) تصف حركة توافقية بسيطة ترددها الزاوي $\omega = \sqrt{k/m}$ وترددها $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$؛ وبذلك يكون تأثير الجاذبية هو تغيير موضع الاتزان مع ترك تردد الذبذبات دون تغيير.



شكل ٦-٧: كتلة M متصلة بزنبرك وتتصادم مع كتلة مماثلة في مثال ٦-٤.

مثال ٦-٤ (كتلة متصلة بزنبرك وتتصادم مع كتلة أخرى). كتلة ($M = 0.100\,\text{kg}$)، تتحرك على منضدة ملساء، مربوطة في نهاية الطرف الأيمن لزنبرك (طول اتزانه $1 = \text{m}$، $k = 4.00\,\text{N/m}$). الطرف الأيسر للزنبرك مربوط بحائط. كان الزنبرك مضغوطًا في البداية بطول مقداره $0.700\,\text{m}$ ثم تُرك. كتلة أخرى ($0.100\,\text{kg}$ أيضًا) موضوعة على المنضدة على مسافة $1\,\text{m}$ من الحائط. عندما تضرب الكتلة المتحركة الكتلة الثابتة، تلتصق الكتلتان إحداهما بالأخرى.

(أ) أوجد أقصر مسافة من الحائط للكتلة $0.200\,\text{kg}$ في حركتها التالية.

(ب) إذا كانت الكتلة الثابتة موضوعة على مسافة $1.200\,\text{m}$ من الحائط والتصقت الكتلتان إحداهما بالأخرى بعد التصادم، أوجد أقصر مسافة من الحائط لاحقة للكتلة $0.200\,\text{kg}$.

(ج) هل تعتمد إجابة (أ) على القيمة العددية للكتلتين (بفرض أن الكتلتين متساويتان) وعلى القيمة العددية لثابت الزنبرك k؟

الحل. (أ) الطاقة E للكتلة $0.100\,\mathrm{kg}$ هي طاقة جهد صرفة، $(1/2)kx_{\max}^2$، عند لحظة الانطلاق. وبما أن التصادم يحدث عند $x = 0$، فإن الطاقة تكون حركية صرفة عند هذه النقطة. نستطيع حساب السرعة v للكتلة $0.100\,\mathrm{kg}$ قبل التصادم مباشرة، لكن هذا غير ضروري. مقدار سرعة الكتلة $0.200\,\mathrm{kg}$ بعد التصادم مباشرة هو $v/2$ (من حفظ كمية التحرك، لا تكون الطاقة محفوظة أثناء التصادم). طاقة حركة الكتلة $0.200\,\mathrm{kg}$ بعد التصادم مباشرة هي $(1/2)(2M)(v/2)^2 = (1/4)Mv^2 = E/2$. وبما أن الطاقة الكلية بعد التصادم تساوي نصف الطاقة الكلية قبل التصادم، فإن قيمة $x_{\max}$ بعد التصادم تساوي $1/\sqrt{2}$ مرة قيمتها قبل التصادم؛ وبذلك بعد التصادم تكون $x_{\max} = 0.3/1.414 = 0.212\,\mathrm{m}$، وأصغر مسافة من الحائط هي $.788\,\mathrm{m} = .212 - 1.0$. واضح أن هذه النتيجة لا تعتمد على القيمة العددية $M = 0.100\,\mathrm{kg}$ أو قيمة k.

(ب) كثيرًا ما يكون من المفيد تعليميًّا حل مسألة ما بدلالة الرموز (التي تمثل الكميات المعطاة، مثل k وM) بدلًا من إدخال قيم عددية سابقة لأوانها. إذا فعلنا ذلك سوف نرى أن إجابة (ب) لا تعتمد على قيمة k أو M. لندع x_0 ترمز لقيمة x عند نقطة إطلاق $M = 0.100\ \mathrm{kg}$ الابتدائية ($x_0 = -0.300\ \mathrm{m}$). ودع x_1 ترمز إلى قيمة x عند نقطة حدوث التصادم ($x_1 = 0.200\ \mathrm{m}$). تكون طاقة الكتلة M قبل التصادم هي $(1/2)kx_0^2$. وتكون طاقة حركة الكتلة M قبل التصادم مباشرة $(1/2)kx_0^2 - (1/2)kx_1^2$. دع $X_{\max}$ ترمز إلى أقصى قيمة لـ x في الحركة بعد التصادم. إذن تكون الطاقة الكلية للكتلة $2M$ بعد التصادم $(1/2)kX_{\max}^2$ وطاقة حركة الكتلة $2M$ بعد التصادم مباشرة هي $(1/2)kX_{\max}^2 - (1/2)kx_1^2$. سبق أن وضحنا أنه عندما يصدم جُسيم متحرك جُسيمًا ثابتًا له نفس كتلته، وتلتصق الكتلتان إحداهما بالأخرى؛ فإن طاقة الحركة بعد التصادم مباشرة تكون مساوية لنصف طاقة الحركة قبل التصادم مباشرة (كما لاحظنا في الفصل الرابع، لا تساهم القوة الخارجية المحدودة (الزنبرك) المؤثرة أثناء زمن تصادم متناهي الصغر بأي كمية حركة في النظام؛ لذا يمكننا استخدام مبدأ حفظ كمية التحرك.) وبذلك نجد أن:

$$\frac{1}{2}kX_{\max}^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right]. \qquad (6\text{–}29)$$

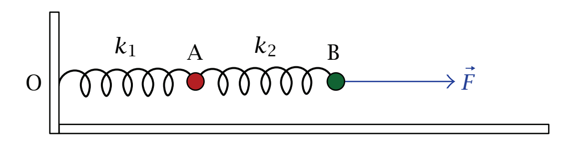
وبحسابات جبرية بسيطة نصل إلى (ج):

$$\left(\frac{X_{\text{max}}}{x_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2\right]. \quad (6\text{–}30)$$

وبإدخال الأعداد، نجد أن $X_{\text{max}} = 0.255\,\text{m}$، وأصغر مسافة من الحائط هي $1.0 - 0.255 = 0.745\ \text{m}$. لم يستخدم هذا الحل أيًّا من قيمتي M وk العدديتين.

بالطبع هناك طرق (مكافِئة) أخرى لحل الجزأين (أ) و(ب) من هذه المسألة، ستؤدي جميعها إلى المعادلة (6–30). يمكن هنا أن نتعلم درسًا مهمًّا للغاية: حتى قبل حل المسألة، نستطيع أن نعرف أن الإجابة لا تعتمد على الرمزين k أو M. نرى ذلك من اعتبارنا لأبعاد الكميات المُدخلة. في النظام المتري، تكون الوحدات الأساسية هي الطول، والكتلة، والزمن. وحدة القوة (النيوتن) كمية مشتقة أبعادها هي: (الكتلة) × (الطول)/(الزمن)^٢. ثابت الزنبرك k أبعاده هي: (الكتلة) × (الزمن)^٢. والكمية X_{max}/x_0 لا أبعاد لها، لكونها نسبة بين طولين. سوف يعطي الحل X_{max}/x_0 بدلالة الكميات المُدخلة x_0, x_1, k, M. الكمية اللابعدية الوحيدة التي تستطيع تكوينها من المدخلات الأربعة هي x_0/x_1. من المستحيل أن تدخل k أو M في كمية لابعدية (سيكون الموقف مختلفًا إذا كانت المسألة تتضمن ثابتي زنبرك أو كتلتين مختلفتين، وسيكون هناك في أي من هذه الحالات نسب لابعدية إضافية). يمكن لهذا النوع من طريقة التفكير، الذي يطلق عليه التحليل البُعدي، أن يكون مفيدًا جدًّا.

مثال ٦–٥ (زنبركان متصلان). كما هو مبين في شكل ٦–٨، OA زنبرك له طول اتزان L_1 وثابت زنبرك k_1. O مربوط بالحائط وA مربوط بزنبرك آخر AB له طول اتزان L_2 وثابت زنبرك K_2. ما القوة المطلوبة لبقاء B على مسافة $L_1 + L_2 + x$ من الحائط؟



شكل ٦–٨: زنبركان متصلان تحت تأثير قوة في مثال ٦–٥.

الحل. ليكن $\hat{\imath}$ متجه وحدة في اتجاه اليمين. إذا أثرنا بقوة $F\hat{\imath}$ على B، فإن B تؤثر بقوة $-F\hat{\imath}$ علينا، ولا بد عندئذ أن يكون الطول AB هو $L_2 + F/k_2$. في حالة الاتزان لا بد أن تتلاشى القوة المحصلة على AB؛ وبالتالي لا بد أن تؤثر OA بقوة $-F\hat{\imath}$ على AB ويكون الطول OA عندئذ هو $L_1 + F/k_1$؛ وبذلك يكون:

$$x = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right). \tag{6-31}$$

إذا كتبنا $F = k_{\text{eq}}x$ (حيث k_{eq} هو ثابت الزنبرك لزنبرك واحد مكافئ للمجموعة)، فإن:

$$\frac{1}{k_{\text{eq}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Longrightarrow$$
$$k_{\text{eq}} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \tag{6-32}$$

إذا كان $k_1 = k_2$، فإن $k_{\text{eq}} = (1/2)k_1$.

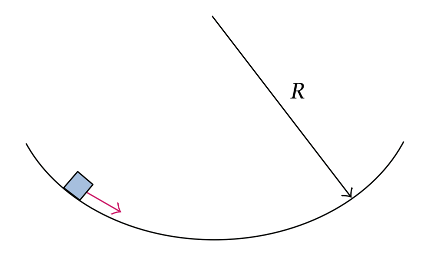
(٦) مسائل التذبذب التوافقي البسيط

المسألة ٦-١. (انظر مثال ٣-٨).

رأينا أنه إذا كانت كتلة ما مربوطة بوتر مربوط في سقف عربة سكة حديد لها عجلة ثابتة $\vec{a}$، يمكن للزنبرك أن يُعَلَّق بزاوية ثابتة (θ) مع الرأسي؛ حيث $\tan\theta = a/g$. إذا أعطينا للكتلة إزاحة بسيطة عن هذا الموضع، ما الزمن الدوري للذبذبات اللاحقة؟ (هناك طريقة سهلة جدًّا لحل هذه المسألة.)

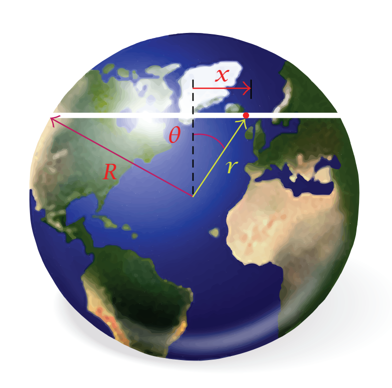
المسألة ٦-٢. ينزلق جُسيم بدون احتكاك داخل سطح كروي نصف قطره R كما هو مبين في شكل ٦-٩. بَيِّنْ أن الحركة بإزاحات صغيرة تكون توافقية بسيطة، وأوجد الزمن الدوري لهذه الحركة.

المسألة ٦-٣. افترض أن نفقًا حُفر على طول وتر يمر من خلال الكرة الأرضية كما هو مبين في شكل ٦-١٠. بافتراض أن الكرة الأرضية لها كثافة كتلة منتظمة، وكتلة



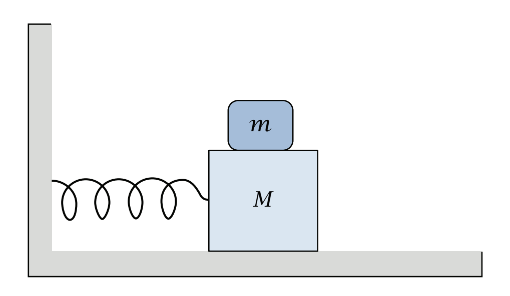
شكل ٦-٩: مسألة ٦-٢.

كلية M ونصف قطر R، بَيِّنْ أنه إذا أُسقط جُسيم كتلته m داخل إحدى نهايتي النفق فإنه يؤدي حركة توافقية بسيطة، وأوجد الزمن الذي يستغرقه الجُسيم ليصل بالضبط إلى النهاية الأخرى للنفق. افترض أن الجُسيم يتحرك في النفق دون احتكاك. لاحظ أنه، لجُسيم داخل توزيع كتلة متماثل كروي منتظم، تكون القوة على الجُسيم متجهة نحو مركز توزيع الكتلة. إذا كان الجُسيم عند مسافة r من المركز، فإن المادة الأبعد عن المركز لا تؤثر بقوة جاذبية على الجُسيم، والمادة الأقرب إلى المركز لها نفس تأثير الجاذبية كما لو كانت مُركزة في المركز.



شكل ٦-١٠: مسألة ٦-٣.

المسألة ٦-٤. يبين شكل ٦-١١ كتلة $m = 1.00\,\text{kg}$ فوق أخرى $M = 5.00\,\text{kg}$ متصلة بزنبرك ثابتهُ $k = 20.0\,\text{N/m}$. تنزلق الكتلة M بدون احتكاك على سطح أملس أفقي، لكن هناك معامل احتكاك استاتيكي μ بين الكتلتين. إذا كانت سعة الذبذبة $A = 0.400\,\text{m}$، ما أقل قيمة لـ μ بحيث لا تنزلق الكتلة العلوية بالنسبة إلى الكتلة السفلية؟



شكل ٦-١١: مسألة ٦-٤.

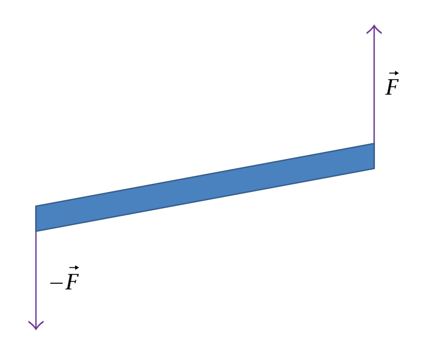
الفصل السابع

الاتزان الاستاتيكي لأجسام جاسئة بسيطة

[إذا لم يكن القارئ على علم بالضرب المتجهي، فعليه قراءة مناقشة ذلك الموضوع في الملحق (أ).]

حتى الآن كان اهتمامنا الأساسي منصبًّا على استاتيكا وديناميكا (حركة) الكتل النقطية. النص الهام الوحيد الذي ذكرناه عن حركة الأنظمة الأكثر تعقيدًا كان المعادلة (4-20)، والتي تنص على أن (نتيجة لقانون نيوتن الثالث) القوة الخارجية الكلية المؤثرة على نظام ما تساوي الكتلة الكلية مضروبة في عجلة مركز الكتلة. على وجه الخصوص، إذا كان النظام في حالة اتزان (أي إن كل الجُسيمات ساكنة أو تتحرك بسرعة ثابتة)، فلا بد أن تكون القوة الكلية الخارجية صفرًا. ومع ذلك، كما نرى من المثال الموضح في شكل ٧-١، فإن تلاشي القوة الكلية الخارجية ليس كافيًا للتأكيد على أن النظام في حالة اتزان. فالقضيب في شكل ٧-١ سوف يبدأ في اللف تحت تأثير زوج القوى المتساوي المتعاكس المطبق عند طرفيه. سوف نهتم في هذا الفصل بالظروف التي لا بد أن تتحقق لكي يظل الجسم في حالة اتزان. وسوف نناقش في الفصل التالي كيفية حركة ولف الجسم عند تعرضه لقوى مختلفة.

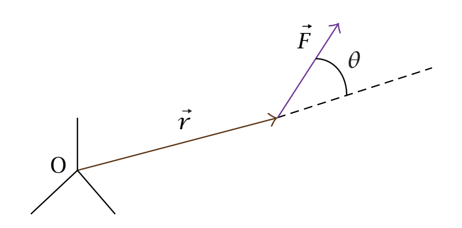
تعتمد مناقشة الاتزان بقدر كبير على مبدأ العزم، كما تتطلب مناقشة حالات عدم الاتزان أيضًا مبدأ كمية التحرك الزاوية الذي سيعرف لاحقًا.



شكل ٧-١: برغم أن القوة المحصلة صفر فإن حركة القضيب متغيرة.

(١) تعريف العزم

نعلم من خبرتنا أنه عندما تؤثر قوة على جسم ممتد (مثلًا، أرجوحة الميزان)، فإن تأثير القوة يعتمد، ليس فقط على مقدار واتجاه القوة، وإنما أيضًا على موضع النقطة التي تؤثر عندها القوة. إذا وضعنا نقطة أصل O ورسمنا متجهًا $\vec{r}$ من O إلى النقطة التي تؤثر عندها $\vec{F}$، فإن المتجه الناتج من حاصل الضرب المتجهي $\vec{r} \times \vec{F}$ يسمى «العزم الناتج من القوة $\vec{F}$ حول نقطة الأصل O». يعتمد العزم على موضع نقطة الأصل؛ لأن المتجه $\vec{r}$ يتغير إذا غيرنا نقطة الأصل.

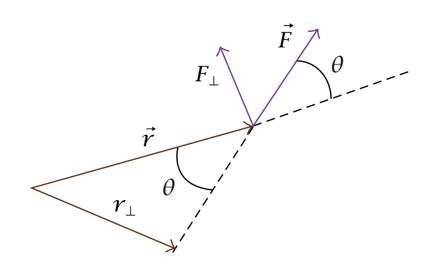


شكل ٧-٢: تعريف العزم.

نرمز للعزم بالمتجه $\vec{\tau}$ (الحرف الإغريقي «تاو»)؛ أي إن:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \qquad (7\text{-}1)$$

اتجاه $\vec{\tau}$ متعامد على المستوى المحتوي على $\vec{r}$ و$\vec{F}$ وسوف يشير (طبقًا لقاعدة اليد اليمنى التي نوقشت بعناية في الملحق (أ)) خارجًا من الصفحة إذا كان $\vec{r}$ و$\vec{F}$ هما المتجهين المبيَّنين في شكل ٧-٣. مقدار $\vec{\tau}$ هو $Fr\sin\theta$، الذي يمكن أن يكتب أيضًا $F\,r_\perp$ أو $r\,F_\perp$؛ حيث $r_\perp$ هو مقدار مركبة $\vec{r}$ المتعامدة مع $\vec{F}$، و$F_\perp$ هو مقدار مركبة $\vec{F}$ المتعامدة مع $\vec{r}$ (انظر شكل ٧-٣).



شكل ٧-٣: تعريف $F_\perp$ و$r_\perp$.

(٢) الاتزان الاستاتيكي للأجسام الممتدة

دعنا نعتبر نظامًا ما (أي مجموعة من الجُسيمات) في حالة اتزان (أي إن كل جُسيم يكون في حالة اتزان). ونرقم الجُسيمات باستخدام الدليل i. القوة الكلية على كل جُسيم تساوي صفرًا.

$$\vec{F}_i = 0. \tag{7-2}$$

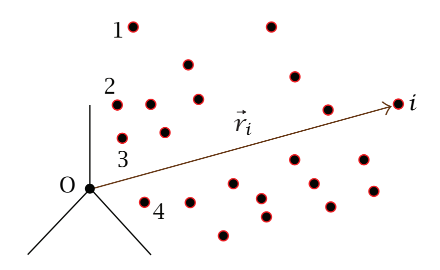
علاوة على ذلك، إذا اخترنا نقطة أصل O وقمنا بضرب طرفي المعادلة (7-2) متجهيًّا في $\vec{r}_i$ (المتجه الواصل من O إلى موضع الجُسيم الذي ترتيبه i)، نجد أن:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0. \tag{7-3}$$

نتذكر أنه إذا جمعنا المعادلات (7-2) لجميع قيم i، فإن القوى الداخلية يلغي بعضها بعضًا كنتيجة لقانون نيوتن الثالث ونحصل على:

$$\vec{F}_{\text{ext}} = 0, \tag{7-4}$$

حيث $\vec{F}_{\text{ext}}$ هي القوة الكلية الخارجية المؤثرة على النظام. هل نستطيع أيضًا القول بأن القوى الداخلية لا ينتج عنها محصلة للعزم مؤثرة على النظام؟



لاختبار هذا السؤال نحلل $\vec{F}_i$ إلى جزأين: خارجي وداخلي (كما فعلنا في الفصل الثاني):

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{i,\text{ext}} + \sum_j \vec{f}_{ji}, \tag{7-5}$$

حيث $\vec{f}_{ji}$ هي القوة التي تؤثر على i بواسطة j. إذا قمنا الآن بجمع معادلات العزم (المعادلة (7-3)) لجميع الجُسيمات، نحصل على:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\text{ext}} + \sum_{ij} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} = 0. \tag{7-6}$$

من الواضح أن أزواج الحدود في كلٍّ من الجمع الثنائي لا يلغي بعضها بعضًا. فمثلًا، الحدان $(i = 1, j = 2)$ و$(i = 2, j = 1)$ يعطيان:

$$\vec{r}_1 \times \vec{f}_{21} + \vec{r}_2 \times \vec{f}_{12} \tag{7-7}$$

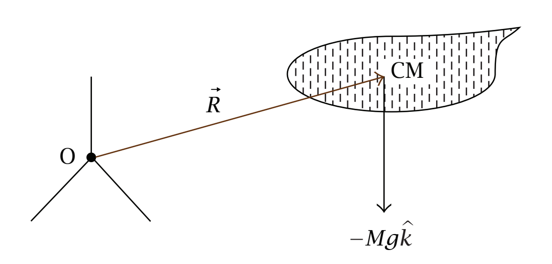
ويمكن دمج ذلك (باستخدام قانون نيوتن الثالث $\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$) ليعطي $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{f}_{21}$. يتلاشى حاصل الضرب المتجهي هذا إذا كانت $\vec{f}_{21}$ متوازية إما مع اتجاه أو عكس اتجاه $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$. لكن $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ هو متجه واصل من الجُسيم رقم ٢ إلى رقم ١؛ وبالتالي إذا كانت القوة بين أي جُسيمين متوازية إما مع اتجاه أو عكس اتجاه الخط الواصل بين الجُسيمين، فإن الضرب المتجهي سوف يتلاشى ولن تساهم القوى الداخلية في العزم

الكلي. القوى التي تؤثر على طول الخط الواصل بين الجُسيمين تسمى قوى مركزية؛ من الأمثلة المألوفة قوة الجاذبية والقوة الكهروستاتيكية (اللتان لهما نفس الصورة الرياضياتية). بعض القوى في الطبيعة ليست قوى مركزية، ومن أكثر الأمثلة المألوفة القوى المغناطيسية. حتى في هذه الحالة، رغم ذلك، يمكن من خلال حجة أكثر تفصيلًا إظهار أن القوى الداخلية لا تساهم في العزم الكلي. لو لم يكن هذا صحيحًا لبدأ نظام ما معزول، تحت ظروف معينة، في الدوران أسرع فأسرع ولتمكن من بذل شغل دون أي طاقة داخلة.

طبقًا لذلك، نؤكد (رغم أن الإثبات العام تمامًا خارج نطاق هذه المناقشة) على أنه، إذا كان نظام ما في حالة اتزان، فإن القوى الداخلية لا تساهم في العزم الكلي؛ وبالتالي:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\mathrm{ext}} = \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = 0, \tag{7-8}$$

حيث $\vec{\tau}_{\mathrm{ext}}$ هو العزم الناتج من القوى الخارجية التي تؤثر على النظام.



شكل ٧-٤: عزم حول نقطة الأصل ناتج من الجاذبية المؤثرة على جسم O.

في معظم الأمثلة التي سوف نعتبرها هنا، تكون قوة الجاذبية واحدة من القوى الخارجية المؤثرة على نظام ما. تؤثر هذه القوة على كل جُسيم في النظام؛ حيث إن الجُسيمات المختلفة على مسافات $\vec{r}$ مختلفة من نقطة الأصل O. رغم ذلك، هناك نظرية هامة تجعل من حساب العزم الناتج بواسطة الجاذبية أمرًا سهلًا. (نفترض هنا أن منطقة الاهتمام صغيرة بقدر كافٍ بحيث يكون مقدار واتجاه قوة الجاذبية لوحدة الكتلة متماثلين لجميع الجسيمات في النظام تحت الدراسة.)

نظرية. من أجل حساب العزوم، يمكن اعتبار قوة الجاذبية الكلية على نظام ما أنها تؤثر على مركز الكتلة. (كما هو مبين في شكل ٧-٤ يكون عزم الجاذبية على النظام هو $\vec{\tau}_{\text{grav}} = \vec{R} \times (-Mg\hat{k})$ حيث $\vec{R}$ المتجه الواصل من نقطة الأصل إلى مركز كتلة النظام، وM الكتلة الكلية، و$\hat{k}$ متجه وحدة يشير رأسيًّا لأعلى.)

ينتج البرهان مباشرة من تعريف مركز الكتلة:

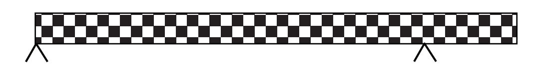
$$M\vec{R} = \sum_i m_i \vec{r}_i. \tag{7-9}$$

عزم الجاذبية هو:

$$\vec{\tau}_{\text{grav}} = \sum_i \vec{r}_i \times \left(-m_i g\hat{k}\right) = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) \times \left(-g\hat{k}\right). \tag{7-10}$$

بإدخال المعادلة (7-9) في المعادلة (7-10) نحصل على $\vec{\tau}_{\text{grav}} = \vec{R} \times (-Mg\hat{k})$ وهي النتيجة المطلوبة. يمكننا بمساعدة هذه النظرية حل بعض الأمثلة.

مثال ٧-١ (الاتزان الاستاتيكي لقضيب متزن). قضيب منتظم وزنه W وطوله L يستند على دعامتين؛ إحداهما عند نهاية الطرف الأيسر والأخرى على بعد $3/4L$ من نهاية الطرف الأيسر. أوجد القوة التي يؤثر بها كل من الدعامتين على القضيب.



الحل. نضع متجهات الوحدة: $\hat{k}$ الذي يشير رأسيًّا لأعلى، $\hat{i}$ الذي يشير نحو اليمين، و$\hat{j}$ إلى داخل الورقة كما هو مبين في شكل ٧-٥. القوى المؤثرة على القضيب هي $F_1\hat{k}$ المؤثرة عند نهاية الطرف الأيسر، و$F_2\hat{k}$ المؤثرة على بعد $3/4L$ من نهاية الطرف الأيسر، وقوة الجاذبية $-W\hat{k}$ التي يمكن اعتبارها مؤثرة عند نقطة المنتصف. وبما أن القوى الكلية على القضيب صفر، فإن:

$$F_1 + F_2 - W = 0. \tag{7-11}$$

لا بد أن يكون العزم الكلي حول أي نقطة أصل صفرًا. إذا أخذنا نقطة الأصل عند نهاية الطرف الأيسر للقضيب، فإن القوة $F_1\hat{k}$ لا تساهم بأي عزم ونحصل على:

$$\vec{\tau} = \left(\frac{L}{2}\hat{\imath}\right) \times \left(-W\hat{k}\right) + \left(\frac{3L}{4}\hat{\imath}\right) \times \left(F_2\hat{k}\right) = 0. \qquad (7\text{–}12)$$

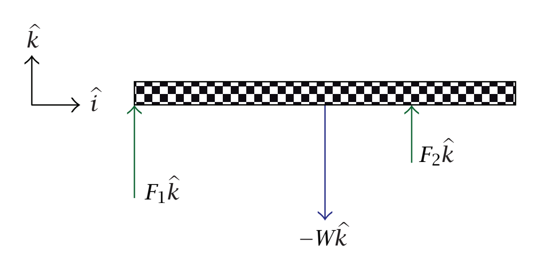
وبذلك يكون:

$$W \cdot \frac{L}{2}\hat{\jmath} - \frac{3}{4}F_2L\hat{\jmath} = 0 \qquad (7\text{–}13)$$

وبالتالي فإن $F_2 = 2/3W$. باستخدام المعادلة (7–11) نجد أن $F_1 = 1/3W$. كان في إمكاننا أيضًا أخذ العزوم حول نقطة أصل أخرى، مثلًا، الدعامة الأخرى. نجد في هذه الحالة:

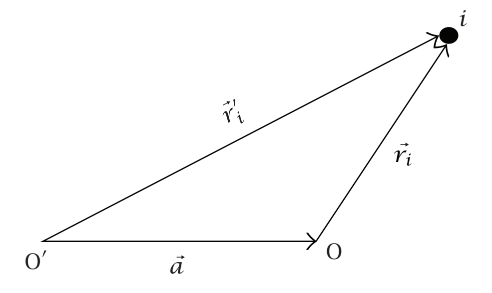
$$\left(-\frac{3L}{4}\hat{\imath}\right) \times \left(F_1\hat{k}\right) + \left(-\frac{L}{4}\hat{\imath}\right) \times \left(-W\hat{k}\right) = 0 \qquad (7\text{–}14)$$

لنصل إلى أن $F_1 = W/3$؛ وبذلك نرى أنه يمكن حل المسألة بكتابة معادلة قوة واحدة ومعادلة عزم واحدة، أو بكتابة معادلتَيْ عزم حول نقطتي أصل.



شكل ٧-٥: القوى المؤثرة على قضيب متزن عند نقطتين.

إذا كانت القوة الكلية على نظام ما صفرًا، وإذا كان العزم حول نقطة أصل معينة صفرًا، فينتج من ذلك أن العزم حول أي نقطة أصل أخرى يكون صفرًا. لرؤية ذلك، لتكن O و′O نقطتي أصل، و$\vec{a}$ هو المتجه الواصل من ′O إلى O. افترض أن القوة

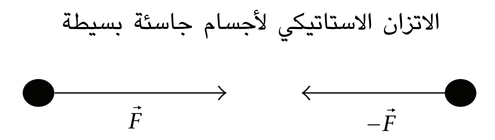


شكل ٧-٦

الخارجية الكلية صفر: $\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_{i,\text{ext}} = 0$، وأن العزم الخارجي حول O صفر: $\vec{\tau}_{\text{O,ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\text{ext}} = 0$؛ حيث $\vec{r}_i$ هو المتجه الواصل من O إلى الجُسيم الذي ترتيبه i. العزم حول O' هو $\vec{\tau}_{\text{O}',\text{ext}} = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_{i,\text{ext}}$؛ حيث $\vec{r}'_i$ هو المتجه الواصل من O' إلى الجُسيم الذي ترتيبه i. نرى من شكل ٧-٦ أن $\vec{r}'_i = \vec{a} + \vec{r}_i$ وبذلك فإن $\vec{\tau}_{\text{O}',\text{ext}} = \sum_i (\vec{a} + \vec{r}_i) \times \vec{F}_{i,\text{ext}} = \vec{a} \times \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{\tau}_{\text{O,ext}}$؛ وبالتالي، إذا تلاشت $\vec{F}_{\text{ext}}$ و$\vec{\tau}_{\text{O,ext}}$، فإن $\vec{\tau}_{\text{O}',\text{ext}}$ يتلاشى أيضًا.

هذا يعني أن المعلومات عن أي نظام بعينه محتواة داخل معادلة القوة بالإضافة إلى معادلة العزم حول نقطة أصل واحدة. وأي معادلات إضافية يُحصل عليها بأخذ العزم حول نقط أصل أخرى ستكون نتائج جبرية لمعادلة القوة ومعادلة العزم الأولى.

بيَّنَّا أن تلاشي القوة والعزم الخارجيين الكليين هما شرطان ضروريان لاتزان نظام ما. ولكن هل سيكون أيضًا هذان الشرطان كافيَيْن للاتزان؟ إذا لم يكن النظام جسمًا جاسئًا فبالتأكيد ستكون الإجابة «لا»، وذلك كما يظهر من اعتبار العديد من الأمثلة البسيطة، مثل ذلك الموضح في شكل ٧-٧. كل من القوة والعزم الكليين يساوي صفرًا، وبالإضافة لذلك سوف يتحرك الجُسيمان أحدهما نحو الآخر بعجلة تزايدية. إذا كان النظام جسمًا جاسئًا، وكانت جميع جُسيمات النظام ساكنة عند لحظة ما، فيمكن أن نُبين أن جميع جُسيمات النظام سوف تظل ساكنة إذا تلاشى كل من القوة والعزم الخارجيين الكليين. يتضمن البرهان، الذي سوف يقدم في الفصل التالي، تحليلًا للحركات الممكنة لجسم جاسئ (التي تكون محدودة على نحو هائل بالمقارنة بحركات مجموعة اختيارية من الجُسيمات).



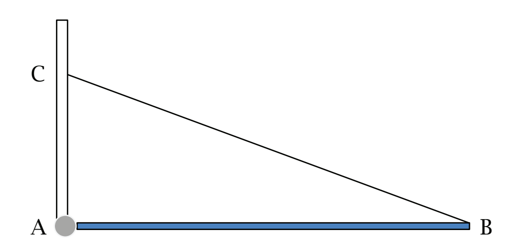
شكل ٧-٧

جميع الأمثلة الاستاتيكية التي سوف نناقشها ثنائية الأبعاد؛ أي إن جميع الجُسيمات وجميع القوى تكون في مستوى (سوف نجعله مستوى الصفحة). طبقًا لذلك، تكون جميع العزوم متعامدة على هذا المستوى وتتناسب (كما يُشار في مثال ٧-١) مع $\hat{j}$ أو $-\hat{j}$. العزم المتناسب مع $\hat{j}$ يتجه إلى داخل الصفحة ويُسمى غالبًا «عزم مع عقارب الساعة»، والعزم المتناسب مع $-\hat{j}$ يتجه إلى خارج الصفحة ويُسمى غالبًا «عزم ضد عقارب الساعة»؛ وبذلك يمكننا حذف جميع المتجهات في معادلة العزم، بشرط أن نتذكر وضع إشارات معكوسة للعزوم التي مع وضد عقارب الساعة.

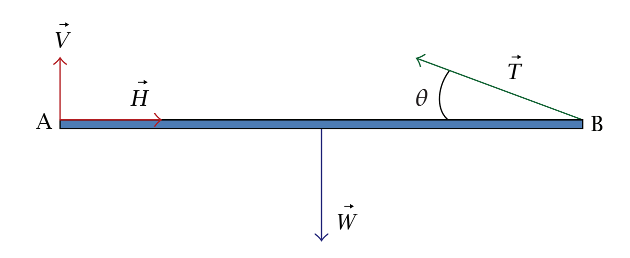
في شكل ٧-٥ تصنع القوة $F_2\hat{k}$ عزمًا ضد عقارب الساعة حول نهاية الطرف الأيسر للقضيب. وتصنع القوة $-W\hat{k}$ عزمًا مع عقارب الساعة. لاحظ أنه في شكل ٧-٥ «تحاول» القوة $F_2\hat{k}$ إدارة القضيب في اتجاه ضد عقارب الساعة حول نهاية طرفه الأيسر، بينما «تحاول» القوة $-W\hat{k}$ إدارة القضيب في اتجاه مع عقارب الساعة حول نهاية طرفه الأيسر. إذا أخذنا نقطة الأصل عند نهاية الطرف الأيمن للقضيب، فإن كلًّا من $F_1\hat{k}$ و$F_2\hat{k}$ تصنعان عزمًا مع عقارب الساعة وتصنع $-W\hat{k}$ عزمًا ضد عقارب الساعة. على الطلاب الذين يجدون صعوبة مع الإشارات حساب حاصلات الضرب المتجهية ببساطة.

مثال ٧-٢ (اتزان استاتيكي لقضيب معلق). قضيب منتظم AB، وزنه W، مُثبت إلى حائط باستخدام مفصل أملس عند A وأُبقيَ عليه في وضع أفقي باستخدام سلك CB عديم الوزن يصنع زاوية θ مع الأفقي. احسب الشد في السلك والمركبتين الرأسية والأفقية للقوة التي يؤثر بها الحائط على القضيب.

الحل. نعرض في شكل ٧-٩ جميع القوى المؤثرة على القضيب. V وH هما مقدارَا القوتين الرأسية والأفقية اللتين يؤثر بهما الحائط عند A، من المفترض أن تكون هاتان القوتان في الاتجاهين الموضحين بالسهمين. إذا اتضح أن V سالبة، فسوف نعلم من



شكل ٧-٨: قضيب معلق عند حائط ومسنود من نهاية طرفه الآخر بوتر.



شكل ٧-٩: مخطط القوة للمثال ٧-٢.

المعادلات أن القوة الرأسية التي يؤثر بها الحائط متجهة إلى أسفل وليس إلى أعلى، سوف تعني قيمة H السالبة أن الحائط يؤثر بقوة أفقية متجهة نحو اليسار. لاحظ أن هناك ثلاثة مجاهيل (V, H, T) وثلاث معادلات تنص على شروط اتزان القضيب (مركبتان لمعادلة القوة ومعادلة عزم واحدة)؛ وبالتالي فإن المسألة محددة رياضيًّا.

المعادلتان الأفقية والرأسية للقوة هما:

$$\begin{aligned} H - T\cos\theta &= 0, \\ V + T\sin\theta - W &= 0. \end{aligned} \tag{7-15}$$

إذا أخذنا عزومًا حول A، نجد أن:

$$W\frac{L}{2} - TL\sin\theta = 0, \tag{7-16}$$

حيث L طول القضيب، وبذلك يكون $T = W/(2\sin\theta)$. وبالتعويض في المعادلة (7-15) نجد أن $H = (W/2)\cot\theta$ و$V = W/2$. كان من الممكن إيجاد قيمة V مباشرة بأخذ العزوم حول B.

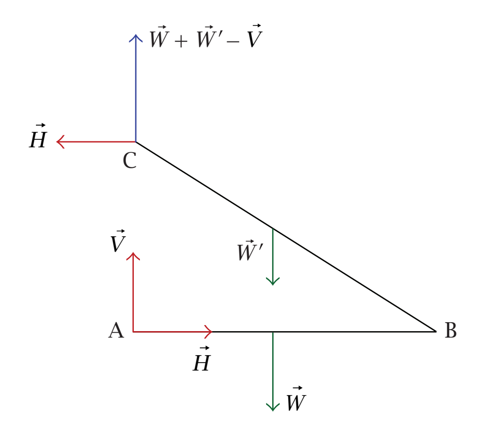
مثال ٧–٣ (الاتزان الاستاتيكي لقضيب معلق ومربوط). تكرس معظم المقررات التمهيدية القليل جدًّا من الوقت للاستاتيكا؛ ونتيجة لذلك، فإن قلة قليلة من الطلاب تكتسب الأسلوب الملائم لحل مسائل كهذه المسألة، ويندر من بين هذه القلة من يستطيع حلها بكفاءة. غير أنه من المفضل أن يدرس الطالب هذا المثال الذي يوضح عددًا من النقاط المهمة.

الشكل الهندسي لهذا المثال مشابه لمثال ٧–٢، AB قضيب وزنه W، وCB قضيب وزنه W'، والوصلات عند A وB وC هي مفاصل ملساء. احسب القوتين الأفقية والرأسية اللتين يؤثر بهما الحائط عند A وعند C، والقوتين الأفقية والرأسية اللتين يؤثر بهما كل قضيب على الآخر عند B.

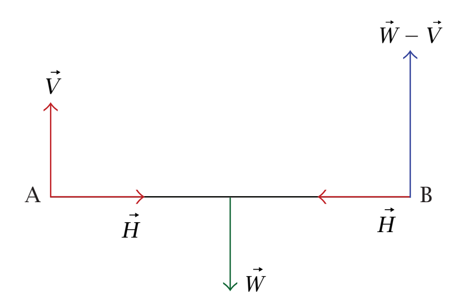
الحل. هناك عدة قوى مجهولة في هذه المسألة. سوف تصبح العمليات الجبرية سهلة بقدر كبير إذا حذفنا، من البداية، بعض المجاهيل باستخدام معادلات القوة وقانون نيوتن الثالث. من المهم أيضًا إدراك أن هناك ثلاثة أنظمة مختلفة (القضيب AB، والقضيب CB، والنظام ABC المتكون من القضيبين) ويمكن كتابة معادلات القوة والعزم لها. [ومع ذلك، ليست كل المعادلات مستقلة جبريًّا. إذا تلاشت القوة والعزم على أي اثنين من هذه الأنظمة، فإن القوة والعزم على النظام الثالث يتلاشيان أيضًا.]

عرضنا في شكل ٧-١٠ جميع القوى الخارجية المؤثرة على ABC (تكون القوى عند الوصلة قوى داخلية في النظام ABC). نرمز إلى القوتين الأفقية والرأسية عند A بالرمزين $\vec{H}$ و$\vec{V}$، مع افتراض اتجاههما كما هو موضح بالسهمين. حينئذٍ يلزم تعيين القوتين الأفقية والرأسية عند C تلاشي القوتين الكليتين الأفقية والرأسية ABC. بالمثل، يبين شكل ٧-١١ القوى المؤثرة على AB (لاحظ أن القوى عند نهاية الطرف الأيمن هي القوى المؤثرة بواسطة القضيب CB على القضيب AB). يبين شكل ٧-١٢ القوى المؤثرة على القضيب CB؛ وبالتالي فإنه، باستخدام معادلات القوة اختزلنا عدد المجاهيل إلى مجهولَين.

أسهل طريقة نستطيع بها تعيين $\vec{V}$ هي بأخذ العزوم على AB حول نقطة الأصل B، لنحصل على $VL - WL/2 = 0$ (L = طول AB) وبهذا تكون $V = W/2$.



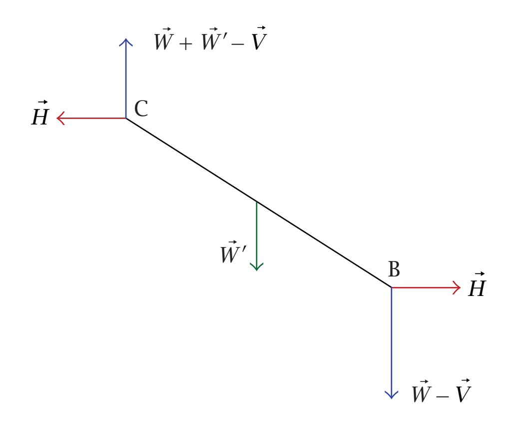
شكل ٧-١٠: مخطط القوة للنظام المركب ABC لمثال ٧-٣.



شكل ٧-١١: مخطط القوة للقضيب AB في مثال ٧-٣.

وإحدى الطرق السهلة لحساب $\vec{H}$ هي أخذ العزوم على ABC حول نقطة الأصل A (شكل ٧-١٠)، لنحصل على $WL/2 + W'L/2 - HL\tan\theta = 0$، وبهذا تكون $H = (1/2)(W + W')\cot\theta$. يمكن للمرء، بالطبع، كتابة معادلات عزم أخرى تؤدي لنفس قيمتي H وV. بإدخال قيمتي H وV في الأشكال من ٧-١٠ إلى ٧-١٢ نحصل على القوى.

أحد الأخطاء الشائعة هي افتراض أن القوة التي يؤثر بها القضيب CB على الحائط متوازية مع القضيب CB. لو كان هذا صحيحًا لكانت القوة التي يؤثر بها الحائط على

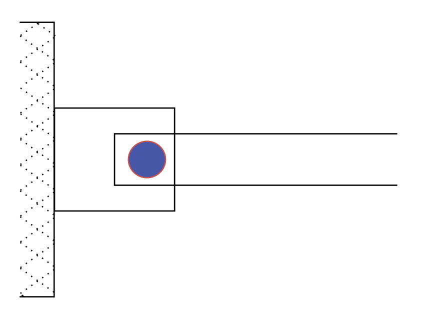


شكل ٧-١٢: مخطط القوة للقضيب CB في مثال ٧-٣.

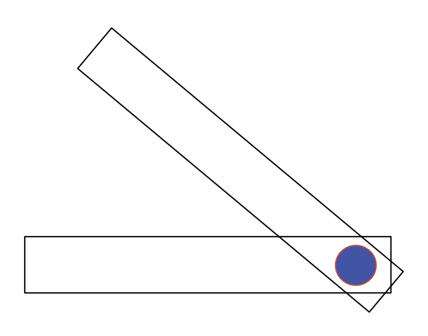
CB متوازية (أو متوازية بالعكس) هي أيضًا مع CB ولصنعت عزمًا حول B؛ وبالتالي فإن العزم الوحيد على CB حول نقطة الأصل B سيكون العزم الناتج من $\vec{W}'$ ولن يتمكن القضيب من أن يكون في حالة اتزان (إلا إذا كانت $W' = 0$، في هذه الحالة تكون القوة التي يؤثر بها CB على الحائط متوازية مع CB).

من المهم أيضًا فهْم ما يعنيه «مفصل أملس»، ولماذا نفترض عادة أن الوصلة مثبتة بمفصل أملس. نفترض أن القضبان متصلة بعضها ببعض، وبسنَّادات على الحائط، بواسطة مسامير عمودية على مستوى الصفحة وتمر خلال ثقوب دائرية في القضبان (انظر الأشكال من ٧-١٣ إلى ٧-١٥). من المفترض أن سطح التماس بين المسمار والثقب مشحم جيدًا بحيث تكون القوى الوحيدة التي تؤثر عند ذلك السطح عمودية على السطح؛ وبالتالي، إذا جعلنا مركز الثقب هو نقطة الأصل، فإننا نرى أن المسمار لا يؤثر بمحصلة عزم على القضيب (لكنه يؤثر غالبًا بمحصلة قوة). إذا ثُبِّت القضيب بسنَّادة حائط بواسطة مفصل صدئ بدرجة كافية (شكل ٧-١٥)، فيمكن أن يظل القضيب في وضع أفقي دون أي دعم إضافي. إذا جعلنا نقطة الأصل عند مركز الثقب، فإن الوزن W يصنع عزمًا على القضيب مع عقارب الساعة؛ رغم ذلك، تصنع المركبة المماسية للقوة التي يؤثر بها المسمار على سطح الثقب عزمًا ضد عقارب الساعة

له نفس مقدار عزم الجاذبية (إذا كان المفصل صدئًا بدرجة كافية)؛ وبالتالي يكون القضيب في حالة اتزان.



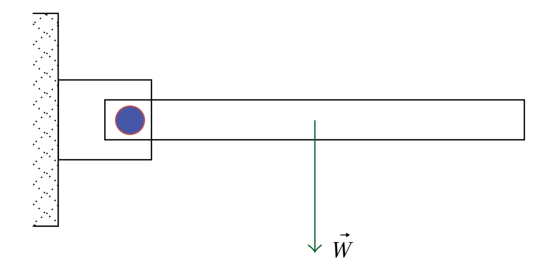
شكل ٧-١٣: مفصل أملس.



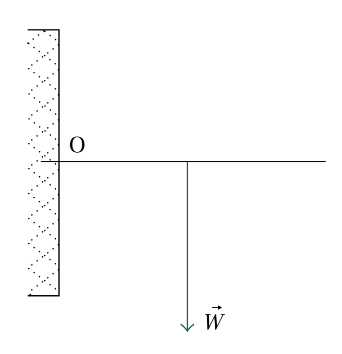
شكل ٧-١٤: مفصل واصل بين قضيبين بزاوية بينهما.

يوضح هذا التحليل أهمية عدم المبالغة في جعل الموقف مثاليًّا. إذا اعتبرنا القضيب جسمًا أحادي البعد بمعنى الكلمة، بحيث يكون للمسمار والثقب نصف قطر يساوي صفرًا، فلن نستطيع فهم كيف يمكن أن يصنع المسمار الصدئ عزمًا حول مركز الثقب.

إحدى الحالات وثيقة الصلة، وذات أهمية في التصميم المعماري والهندسة، هي لقضيب أفقي، أُدخلت إحدى نهايتيه في ثقب في الحائط.

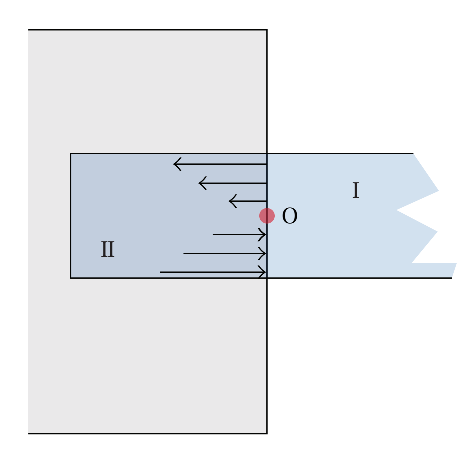


شكل ٧-١٥: قضيب وزنه W مثبت إلى حائط بواسطة مفصل صدئ.



شكل ٧-١٦: قضيب في ثقب في حائط.

إذا عرَّفنا نظامنا بأنه جزء القضيب خارج الحائط، وإذا أخذنا نقطة الأصل O النقطة التي يدخل عندها القضيب في الحائط (شكل ٧-١٦)، فيتضح إذن أن العزم الوحيد على النظام هو عزم الجاذبية. مرة أخرى، لا بد أن ندرك أن للقضيب سمكًا محدودًا. في الواقع، يتدلى الجزء البارز من القضيب قليلًا بحيث يُطيل الجزء العلوي من القضيب بقدر بسيط (في الشد) وينضغط الجزء السفلي بقدر بسيط. قسَّمنا القضيب في شكل ٧-١٧ إلى جزء I خارج الحائط وجزء II داخل الحائط بواسطة مستوى تخيلي. يصور شكل ٧-١٧ تخطيطًا للقوى التي يؤثر بها II على I خلال المستوى المُقسِّم. في الجزء العلوي من القضيب، يؤثر II بقوة سحب على I نحو اليسار، وفي

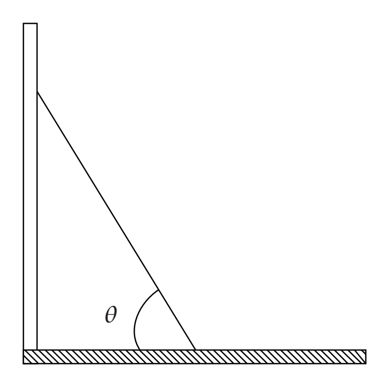


شكل ٧-١٧

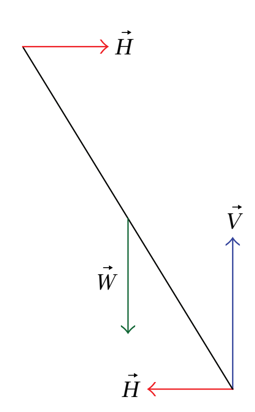
الجزء السفلي للقضيب يؤثر II بقوة دفع على I نحو اليمين. إذا أخذنا نقطة الأصل O عند نقطة منتصف المستوى المُقسِّم، فمن الواضح أن نظام القوى الموضح في شكل ٧-١٧ يصنع عزمًا ضد عقارب الساعة يلغي عزم الجاذبية مع عقارب الساعة. الأكثر من ذلك، II يؤثر بقوة رأسية (قص) على I تسمح بتحقيق معادلة القوة. تحليل القوى الداخلية في القضبان، والتشوه الصغير المصاحب لتلك القوى، هو خارج نطاق هذه المناقشة.

مثال ٧-٤ (سلم يتكئ على جدار أملس). سلم منتظم يقف مستندًا بنهاية طرفه العلوي على حائط أملس ويستند طرفه السفلي على أرضية خشنة (معامل الاحتكاك الاستاتيكي μ_s). يميل السلم بزاوية θ على الأفقي. احسب القوتين الرأسية والأفقية التي تؤثر بهما الأرضية، واحسب أقل زاوية θ يمكن عندها أن يقف السلم دون أن ينزلق.

الحل. يبين شكل ٧-١٩ القوى المؤثرة على السلم. يمكن للحائط، لكونه أملس، أن يؤثر فقط بقوة أفقية $\vec{H}$ متجهة نحو اليمين. لكي تتلاشى القوة الكلية على السلم، لا بد أن



شكل ٧-١٨: سلم يتكئ على جدار أملس في مثال ٧-٤.

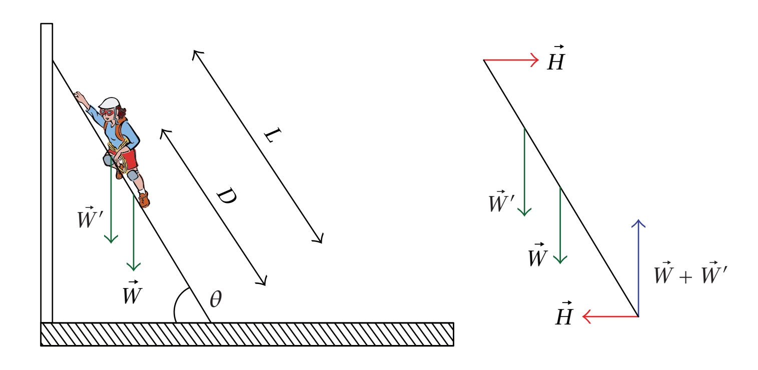


شكل ٧-١٩: مخطط القوة لسلم يتكئ على جدار أملس.

تؤثر الأرضية بقوة مقدارها H متجهة نحو اليسار وقوة رأسية تساوي وزن السلم W. بأخذ العزوم حول نهاية الطرف السفلي للسلم، نجد أن:

$$HL\sin\theta - W\frac{L}{2}\cos\theta = 0, \tag{7-17}$$

حيث L طول السلم؛ وبذلك تكون $H = (W/2)\cot\theta$. لكي لا ينزلق السلم لا بد أن يكون $H/W \le \mu_s$؛ أي إن $(1/2)\cot\theta \le \mu_s$؛ وبالتالي فإن $\theta_{\min} = \cot^{-1}(2\mu_s)$.



شكل ٧-٢٠: تسلق سلم يتكئ على جدار أملس في مثال ٧-٥.

مثال ٧-٥ (تسلق سلم يتكئ على جدار أملس). نبين في شكل ٧-٢٠ سيدة وزنها W' عند مسافة D من أسفل سلم طوله L ووزنه W يميل فوق الأفقي بزاوية $60.0°$. ليكن $W = 222$ newtons و$L = 6.10$ meters. معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين السلم والأرضية هو μ_s.

(أ) إذا كان $\mu_s = 0.600$، فاحسب وزن أثقل شخص يستطيع التسلق إلى قمة السلم دون أن يتسبب في انزلاقه. أجب على نفس السؤال إذا كان $\mu_s = 0.500$.
(ب) إذا كان $\mu_s = 0.500$، فما أقصى ارتفاع على السلم يستطيع أن يصعد إليه شخص وزنه ١١١٠ نيوتن ($5W'$) قبل أن ينزلق السلم؟

الحل. يبين مخطط القوة في شكل ٧-٢٠ القوى المؤثرة على السلم (من المفترض أن وزن السيدة الكلي متزن حول ركبتها وهي تتكئ على السلم، وأن الركبة تبعد مسافة D عن أسفل السلم). بأخذ العزوم على السلم حول نهاية الطرف السفلي، نجد أن: $HL\sin\theta - WL/2\cos\theta - W'D\cos\theta = 0$؛ وبذلك فإن $H = (W/2 + W'D/L)\cot\theta$. ولكي لا ينزلق السلم، لا بد أن يكون لدينا $H/(W + W') \leq \mu_s$؛ أي إن:

$$\frac{(1/2 + W'D/WL)\cot\theta}{(1 + W'/W)} \leq \mu_s. \qquad (7\text{–}18)$$

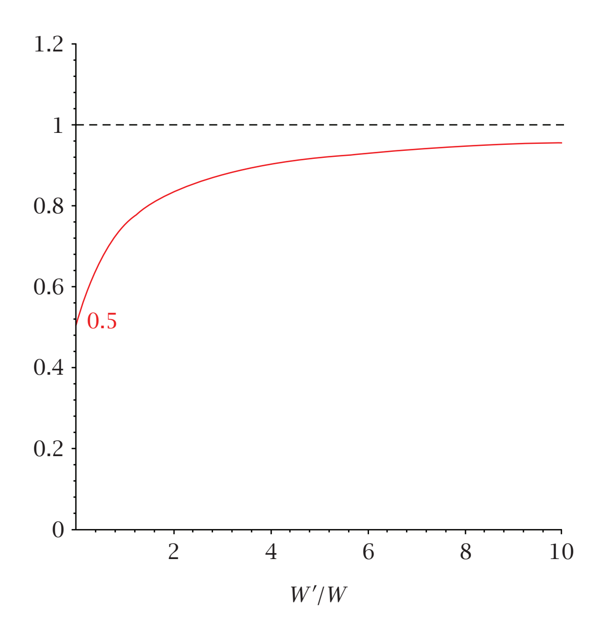
لاحظ أن الطرف الأيسر من المعادلة (7-18) يزيد بزيادة D؛ وبالتالي، إذا تحققت المعادلة (7-18) عند $D = L$، فإنها تتحقق أيضًا عند $D < L$؛ وبذلك فإن السيدة تستطيع الوصول إلى قمة السلم إذا كان:

$$\frac{(1/2 + W'/W)\cot\theta}{(1 + W'/W)} \leq \mu_s. \qquad (7\text{-}19)$$

شكل ٧-٢١ عبارة عن رسم بياني للمقدار $(1/2 + W'/W)/(1 + W'/W)$ كدالة في W'/W. الرسم البياني دالة متزايدة في W'/W تقترب من القيمة التقرُّبية ١ كلما كان $W'/W \to \infty$. وطبقًا لذلك، إذا كان $\cot\theta \leq \mu_s$، فإن أي شخص (مهما كان وزنه) يستطيع التسلق إلى القمة دون أن يتسبب في انزلاق السلم. في هذه المسألة $\theta = 60°$ و$\cot\theta = .577$؛ وبالتالي إذا كان $\mu_s = 0.6$، فإن أي شخص يمكنه الوصول للقمة. وإذا كان $\mu_s = 0.5$، فإننا نوجد وزن أثقل شخص يمكنه الوصول للقمة بوضع الطرف الأيسر من المعادلة (7-19) مساويًا لـ ٠,٥. يؤدي هذا إلى أن $W'/W = (\mu_s - 1/2\cot\theta)/(\cot\theta - \mu_s) = 2.73$؛ وبالتالي فإن $W' = 606$ newtons أو حوالي ١٣٦ رطلًا. إذا كان $W' = 1110$ newtons، فإن السلم سوف ينزلق قبل أن يصل الشخص للقمة. بوضع الطرف الأيسر من المعادلة (7-18) مساويًا لـ ٠,٥ وبإدخال $W'/W = 5$ نجد أن $.5 = (1/2 + 5D/L)(.577)/6$، وهو ما يؤدي إلى أن $D/L = .940$؛ وبالتالي فإن D = ٥,٧٣ متر أو حوالي ١٨,٨ قدمًا بالنسبة لسلم طوله حوالي ٢٠ قدمًا.

قبل ترك موضوع الاستاتيكا، ينبغي لنا أن ندرك أننا قصرنا اهتمامنا على المواقف المحددة رياضيًّا؛ أي المواقف التي يمكن فيها تعيين جميع القوى بواسطة معادلات القوة والعزم دون الحاجة إلى معلومات إضافية تفصيلية عن النظام. الأمثلة التالية، غير المحددة استاتيكيًّا، توضح حقيقة أن معادلات القوة والعزم ليست كافية دائمًا للإجابة على جميع الأسئلة.

(أ) سلم يتكئ على حائط خشن وقاعدته على أرضية خشنة. هناك أربع قوى مجهولة (قوة رأسية وأخرى أفقية عند كل طرف من طرفي السلم) وثلاث معادلات فقط (معادلة عزم ومعادلة قوة أفقية ومعادلة قوة رأسية).



شكل ٧-٢١: رسم بياني للمقدار $(1/2 + W'/W)/(1 + W'/W)$ كدالة W'/W في المثال ٧-٥.

(ب) قضيب أفقي مدعوم عند ثلاث نقاط. هناك ثلاث قوى مجهولة ومعادلتان (معادلة قوة ومعادلة عزم).

(ج) علامة معلقة على حائط بواسطة مفصلين أملسين عند نقطتين (انظر شكل ٧-٢٢). هناك أربع قوى مجهولة (قوتان عند كل مفصل) وثلاث معادلات.

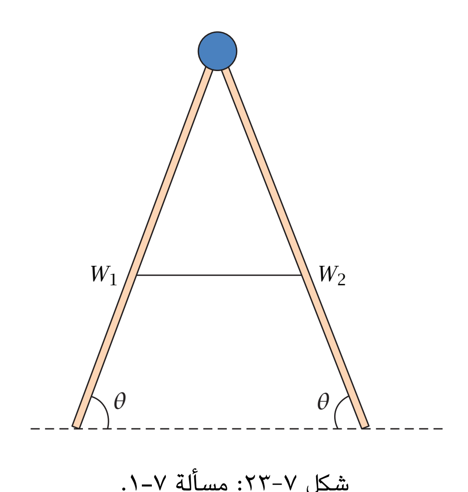
الطبيعة، بالطبع، ليست غير محددة. لا يمكن في أي من هذه الأمثلة معالجة عدم التحديد الظاهر إلا بمعرفة شيء ما عن خواص المرونة للأجسام قيد الاعتبار، فجميع الأجسام تخضع لتشوهات صغيرة عند تعرضها لقوى. نحتاج في هذه الحالات إلى معرفة العلاقة بين التشوهات والقوى. بهذه المعلومات، إلى جانب معادلات القوة والعزم، يمكن تعيين جميع القوى.



شكل ٧-٢٢: علامة معلقة في حائط بواسطة مفصلين أملسين.

(٣) مسائل الاتزان الاستاتيكي

المسألة ٧-١. إطار على شكل حرف A يتكون من قضيبين متساويين في الطول متصلين عند نقطة التقابل بمفصل أملس ومتصلين بسلك عند نقطتي منتصفهما. وزن القضيبين W_1 وW_2، وكلاهما يصنع زاوية θ مع الأفقي. احسب الشد في السلك، مع ملاحظة أن الأرضية ملساء.



شكل ٧-٢٣: مسألة ٧-١.

المسألة ٧-٢ (*). لوح مائل بزاوية θ (يمكن تغييرها) فوق الأفقي. وهناك كتلة ساكنة على اللوح. معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين الكتلة واللوح هو μ. ارتفاع الكتلة (أي البعد العمودي على المنحدر) $10.0\,\text{cm}$ وعرضها (البعد الموازي للمنحدر) $6.00\,\text{cm}$. افترض أننا قمنا بزيادة θ ببطء، بداية من $\theta = 0$. من الواضح أن في النهاية، حسب قيمة μ، سوف تنزلق الكتلة أسفل المنحدر أو سوف تنقلب.

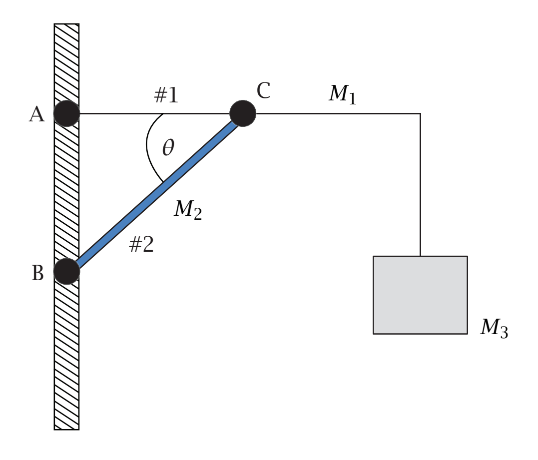
(أ) احسب القيمة الحرجة μ_c التي تفصل بين مرحلتي الانزلاق والانقلاب.

(ب) إذا كان ارتفاع الكتلة h وعرضها w، احسب μ_c.

المسألة ٧-٣. (قارن بين هذه المسألة والمسألة ٢-٢) قضيب منتظم AB (وزنه W، وطوله L) متصل بالسقف بواسطة مفصل أملس عند A. قضيب منتظم ثانٍ BC (وزنه W'، وطوله L') متصل بالقضيب AB بمفصل أملس عند B. هناك قوة أفقية $\vec{F}$ مطبقة على القضيب BC عند نهاية الطرف السفلي (C). احسب الزاوية بين كل قضيب وبين الرأسي في حالة الاتزان.

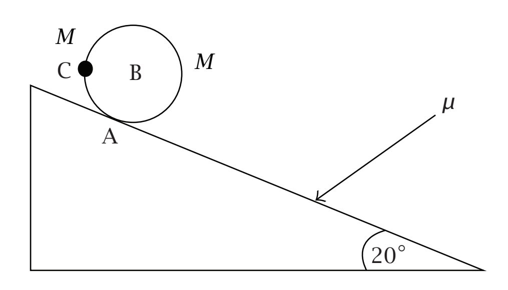
المسألة ٧-٤. قضيب أفقي (رقم ١) كتلته M_1 (موزعة بانتظام) وطوله L_1، مربوط في حائط رأسي بمفصل أملس عند نهاية طرفه الأيسر (A). كتلة M_3 معلقة من نهاية الطرف الأيمن، ومربوطة بواسطة خيط رأسي عديم الكتلة. القضيب رقم ١ مدعوم من أسفل بواسطة قضيب قطري (رقم ٢) كتلته M_2 (موزعة بانتظام). نهاية الطرف الأيسر (السفلي) لرقم ٢ مربوطة بالحائط بواسطة مفصل أملس عند نقطة (B) أسفل A، والنهاية اليمنى لرقم ٢ مربوطة برقم ١ بواسطة مفصل أملس عند النقطة C، في منتصف رقم ١. الزاوية بين رقم ٢ والأفقي هي θ. احسب القوتين الأفقية والرأسية المؤثرتين بواسطة الحائط على كل من A وB، والقوتين الأفقية والرأسية المؤثرتين بواسطة رقم ٢ على رقم ١ عند C. [ينبغي أن يكون حلُّك مختصرًا بقدر الإمكان ولا يجب أن يتضمن الكثير من العمليات الجبرية.]

المسألة ٧-٥. طوق كتلته M به كتلة نقطية (M أيضًا) مربوطة عند نقطة على المحيط. الطوق في حالة اتزان استاتيكي على مستوى مائل، أُبقي في مكانه بواسطة الاحتكاك



شكل ٧-٢٤: مسألة ٧-٤.

الساكن. يصنع المستوى زاوية 20° مع الأفقي. أوجد الزاوية α بين الخطين AB وBC؛ حيث A النقطة التي عندها يلمس الطوق المستوى، وB مركز الطوق، وC موضع الكتلة النقطية.



شكل ٧-٢٥: مسألة ٧-٥.

الفصل الثامن

الحركة الدورانية، وكمية التحرك الزاوية وديناميكا الأجسام الجاسئة

تذكر أن الإطار القصوري (المرجعي) هو مجموعة من المحاور بحيث إذا قِست المواضع والسرعات بالنسبة إلى تلك المحاور، يكون قانون نيوتن الأول صحيحًا؛ أي إن الجُسيم الذي لا يتعرض لأي قوة سوف يتحرك بسرعة ثابتة. وبالأخص، لا بد أن لا تكون محاور الإطار القصوري دوارة بالنسبة إلى خلفية النجوم البعيدة. بالنسبة إلى حركة نقطة أصل إطار قصوري، هناك بعض الاعتباطية بسبب عدم الدقة في مفهوم «لا توجد قوة». سوف نفترض هنا أننا نفهم معنى «إطار قصوري» بقدر يكفي لحل مسائل أولية.

اعتبر جُسيمًا كتلته m ومتجه موضعه بالنسبة إلى نقطة الأصل O لإطار قصوري هو $\vec{r}$ وسرعته وعجلته هما $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ و $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$. بأخذ حاصل الضرب المتجهي لطرفي معادلة الحركة $\vec{F} = m\vec{a}$ مع $\vec{r}$ نحصل على:

$$\vec{r} \times \vec{F} = m\vec{r} \times \vec{a}, \tag{8-1}$$

حيث $\vec{F}$ القوة الكلية المؤثرة على الجُسيم. الطرف الأيسر للمعادلة (8-1) هو، بالطبع، العزم $\vec{\tau}$ (حول نقطة الأصل O) المؤثر على الجُسيم. نُعرِّف أيضًا كمية التحرك الزاوية $\vec{L}$ للجُسيم حول نقطة الأصل O بالمعادلة:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}. \tag{8-2}$$

وباستخدام قاعدة تفاضل الضرب المتجهي (انظر الملحق (أ)) نجد أن:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \vec{a}. \tag{8-3}$$

وبما أن $\vec{v} \times \vec{v} = 0$، نستطيع دمج المعادلتين (8-1) و(8-3) للحصول على:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \tag{8-4}$$

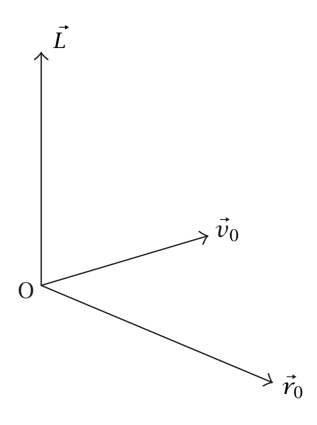
بالكلمات: العزم يساوي معدل تغير كمية التحرك الزاوية (مثل جملة أن القوة تساوي معدل تغير كمية التحرك الخطية).

(١) كمية التحرك الزاوية والقوة المركزية

المعادلة (8-4) لها نتائج مهمة عند تطبيقها على مسألة القوة المركزية؛ أي الجُسيم المتحرك بتأثير قوة متجهة دائمًا لنقطة ثابتة. إذا أخذنا نقطة الأصل O عند هذه النقطة الثابتة، فإن العزم يتلاشى؛ لأن $\vec{r}$ و$\vec{F}$ متوازيان في نفس الاتجاه (أو متوازيان بعكس الاتجاه)؛ وبالتالي فإن $d\vec{L}/dt = 0$، وتكون كمية التحرك الزاوية $\vec{L}$ ثابتة. ثبوت $\vec{L}$ يقتضي ضمنًا أنْ:

(أ) تقع حركة الجُسيم في مستوى ثابت، يسمى المستوى المحتوي على مركز القوة، والموضع الابتدائي للجُسيم، ومتجه السرعة الابتدائي للجُسيم.
(ب) يمسح المتجه الواصل من مركز القوة إلى الجُسيم مساحات بمعدل ثابت (هذا هو قانون كبلر الثاني، وهو خاصية لجميع القوى المركزية، وليس فقط لقانون التربيع العكسي)؛ وهذا مع حركة الجُسيم في هذا المستوى.

لإثبات (أ)، نمرر مستوى خلال مركز القوة O عموديًّا على المتجه الثابت $\vec{L}$. تقتضي المعادلة (8-2) ضمنًا أن يكون $\vec{r}$ عموديًّا على $\vec{L}$؛ وبالتالي فإن $\vec{r}$ يقع في المستوى. لكن بما أن $\vec{L} = m\vec{r}_0 \times \vec{v}_0$ (حيث $\vec{r}_0$ و$\vec{v}_0$ هما متجهَا الموضع والسرعة الابتدائيان)، فإن المستوى العمودي على $\vec{L}$ يكون هو المستوى الذي يحتوي على $\vec{r}_0$ و$\vec{v}_0$.

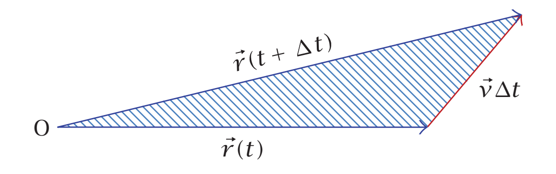


شكل ٨-١: اتجاه $\vec{L}$.

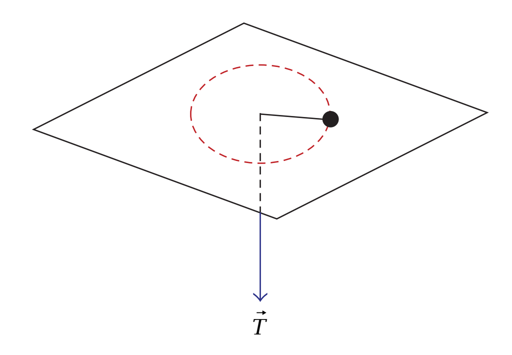
في إثبات (أ)، استخدمنا فقط حقيقة ثبوت اتجاه $\vec{L}$. مقدار $\vec{L}$ ثابت أيضًا. باستخدام تعريف الضرب المتجهي، نجد أن مقدار $\vec{L}$ هو:

$$\left|\vec{L}\right| = mrv\sin\theta = mrv_{\tan}, \qquad (8\text{-}5)$$

حيث الزاوية θ بين $\vec{r}$ و$\vec{v}$، و$v\sin\theta = v_{\tan}$ السرعة المماسية (أي مركبة السرعة العمودية على $\vec{r}$). المساحة المظللة في شكل ٨-٢ هي المساحة التي يمسحها المتجه $\vec{r}$ في الفترة الزمنية الصغيرة Δt. تكون المساحة خلال قيم الدرجة الأولى في Δt هي $\Delta A = (1/2)rv_{\tan}\Delta t$؛ وبالتالي فإن المعدل الذي تُمسح به المساحة هو $dA/dt = (1/2)rv_{\tan} = L/2m$. ولأن L ثابتة، فإن dA/dt ثابتة.



شكل ٨-٢: مساحة ممسوحة بواسطة المتجه النصف قطري.



شكل ٨-٣: جُسيم يتحرك على منضدة أفقية في مسار دائري مُحافظ عليه بواسطة شد في الوتر المربوط في الجُسيم في مثال ٨-١.

مثال ٨-١ (جسيم يتحرك على مستوى أفقي في مسار دائري). جُسيم كتلته m يتحرك على سطح منضدة أفقية ملساء، مقيد بوتر يمر خلال ثقب في المنضدة (شكل ٨-٣). في البداية يتحرك الجُسيم بسرعة مقدارها v_1 في دائرة نصف قطرها r_1. يُسحب الوتر ببطء حتى يتحرك الجُسيم في دائرة أصغر نصف قطرها r_2. احسب:

(أ) مقدار سرعة الجُسيم الجديدة v_2.
(ب) النسبة T_2/T_1 (حيث T_1 وT_2 هما الشدان الابتدائي والنهائي في الوتر).
(ج) الشغل المبذول على الجُسيم بواسطة الوتر.

الحل. القوة التي يؤثر بها الوتر على الجُسيم موجهة دائمًا نحو الثقب؛ وبالتالي تكون كمية التحرك الزاوية محفوظة؛ أي إن، $v_1 r_1 = v_2 r_2$؛ وبالتالي فإن $v_2 = v_1(r_1/r_2)$. وبما أن $T = mv^2/r$ فيكون لدينا:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3. \tag{8-6}$$

أسهل طريقة لحساب الشغل المبذول W بواسطة الوتر هي باستخدام نظرية الشغل والطاقة؛ أي إن:

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1^2\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 1\right]. \tag{8-7}$$

من المفيد أيضًا تعليميًّا حساب الشغل مباشرة من تعريف $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (لاحظ أن الشد في الوتر يتغير مع سحب الوتر لذلك لا نستطيع التعامل مع القوة على أنها ثابت). في اللحظة التي يكون عندها طول الوتر (من الثقب إلى الجُسيم) r، يكون الشد (من المعادلة (8-6)) $T = (mv_1^2/r_1)(r_1/r)^3$، والقوة المؤثرة على الجُسيم $\vec{F} = -T\hat{r}$؛ حيث $\hat{r}$ متجه وحدة يشير في الاتجاه الخارج من نقطة المركز. عند تغيير طول الوتر من r إلى $r + dr$ (لاحظ أن dr سالبة عند تقصير الوتر)، تكون إزاحة الجسم هي $\hat{r}dr$ مجموع عليها مركبة مماسية لا تساهم في الشغل؛ وبذلك يكون:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \left[-\left(\frac{mv_1^2}{r_1}\right)\left(\frac{r_1}{r}\right)^3 \hat{r} \right] \cdot [\hat{r}dr] = -mv_1^2 r_1^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^3}$$

$$= \left(-mv_1^2 r_1^2\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right] \tag{8-8}$$

$$= \frac{1}{2}mv_1^2\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 - 1\right]$$

وذلك بالاتفاق مع المعادلة (8-7).

بالإضافة إلى ذلك، إذا طبقنا نظرية الشغل والطاقة على العملية المتناهية الصغر التي يتغير فيها طول الوتر من r إلى $r + dr$ ويتغير مقدار سرعة الجُسيم من v إلى $v + dv$، نجد أن $-(mv^2/r)dr = (1/2)m(v + dv)^2 - (1/2)mv^2$ مما يؤدي إلى $dv/v = -dr/r$؛ وبذلك يكون $d(\ln v + \ln r) = 0$ مما يقتضي ضمنًا أن يكون $\ln v + \ln r = \text{const}$؛ أي إن vr = ثابت، وهو نص حفظ كمية التحرك الزاوية. الميكانيكا بنية منطقية أنيقة ومتناسقة.

(٢) أنظمة لأكثر من جُسيم واحد

نتجه باهتمامنا الآن إلى الأنظمة المتكونة من أكثر من جُسيم (الدليل i يدل على رقم الجُسيم). كل جُسيم يخضع للمعادلة (8-4)؛ أي إن:

$$\vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}_i}{dt} \quad \left[\vec{\tau} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i,\, \vec{L}_i = m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i\right]. \tag{8-9}$$

إذا جمعنا معادلات العزم (8-9) لجميع الجُسيمات في النظام، فإن العزوم التي تعزى إلى قوى داخلية تلاشى بعضها بعضها لأسباب نوقشت في الفصل السابع. وبتعريف كمية التحرك الزاوية الكلية بأنها مجموع كميات التحرك الزاوية للجُسيمات المفردة:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{8-10}$$

نحصل على:

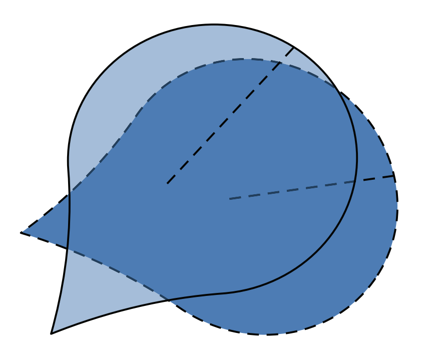
$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \tag{8-11}$$

حيث $\vec{\tau}_{\text{ext}}$ هو العزم الخارجي الكلي المؤثر على النظام.

افترضنا في اشتقاق المعادلة (8-11) أن $\vec{r}_i$ و$\vec{v}_i$ هما موضع وسرعة الجُسيم رقم i في إطار قصوري. في الحقيقة، المعادلة (8-11) صحيحة أيضًا إذا استخدمنا محاور غير دوَّارة (بالنسبة إلى النجوم البعيدة) ونقطة الأصل لها هي مركز كتلة النظام، (البرهان معطى في ملحق (أ).) مثل هذه المحاور لا تكون إطارًا قصوريًّا إذا كان مركز الكتلة متسارعًا (متحركًا بعجلة)، ولكنها عادة ما تكون أنسب المحاور.

معادلة القوة (4-20) $[\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{A}_{\text{CM}}]$ ومعادلة العزم (8-11) تحدِّدان الحركة تمامًا إذا كان النظام جسمًا جاسئًا، وهدفنا هنا هو تطوير أساليب لحل المسائل البسيطة، محافظين على أن تكون الرياضيات أبسط ما يمكن؛ لهذا سوف نقصر اهتمامنا أساسًا على الجسم الجاسئ «ذي البُعدين» الذي يتحرك دائمًا في مستوى الصفحة، ويمكن إهمال سمْكه في الاتجاه العمودي على هذه الصفحة. يمكن تطبيق التحليل أيضًا على الأجسام الجاسئة التي لا يمكن إهمال سمكها، بشرط أن تكون جميع حركات الجسم موازيةً لمستوًى ثابت، وأن يمتلك الجسم تماثُلًا كافيًا. (المناقشة الكاملة لهذه النقطة سوف تأخذنا بعيدًا جدًّا عن المجال. انظر ملحق (ب).)

إذا رسمنا خطًّا على جسم جاسئ أحادي البعد، فسوف يكون لهذا الخط، عمومًا، موضع واتجاه مختلفان عند زمن $t + \Delta t$ مقارنةً بموضعه واتجاهه عند زمن t. في شكل (٨-٤) يمثل المنحنيان المتصل والمتقطع شكل الجسم عند الزمنين t، و$t + \Delta t$ على التوالي. لِتَكُن الزاوية بين اتجاهَيْ خطَّيِ الزمن الابتدائي (الزمن t) والزمن النهائي (الزمن $t + \Delta t$) هي $\Delta\theta$؛ نقيس $\Delta\theta$ بالتقدير الدائري ونُسمي $\Delta\theta$ موجبةً إذا كان



شكل ٨-٤: جسم ذو بُعدين يُدار بزاوية.

هناك دوران مع عقارب الساعة يحمل الخط من اتجاهه الابتدائي إلى اتجاهه النهائي، ونسميها سالبةً إذا كان الدوران في عكس اتجاه عقارب الساعة. سرعة الجسم الزاوية ω تعرَّف على الصورة:

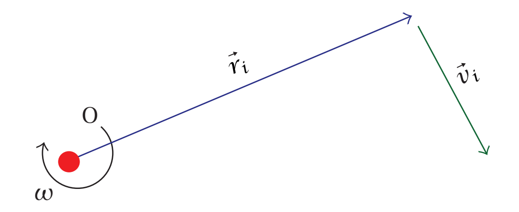
$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \tag{8-12}$$

قيمة ω الناتجة لا تعتمد على ما هو الخط الذي رسمناه على الجسم؛ لأن كل الخطوط تدور نفس الزاوية نتيجة لحقيقة أن الجسم جاسئ.

افترض نقطةً ما O للجسم أُبقيَ عليها ثابتة (الطريقة الواضحة لعمل ذلك أن تمرِّر محورًا، عموديًّا على الصفحة، خلال الجسم عند O). نختار لمحاورنا إطارًا قصوريًّا نقطة الأصل له عند O. ما هي كمية التحرك الزاوية $\vec{L}$ للجسم حول نقطة الأصل O؟ كل نقاط الكتلة تتحرك في دوائر حول O (شكل ٨-٥)؛ لأن بُعدها عن O لا يمكن أن يتغير. وهكذا فإن النقطة الكتلية التي يكون بُعدها المتجهي عن O هو $\vec{r}_i$ يكون مقدار متجه سرعتها $\vec{v}_i$ هو $v_i = |\omega r_i|$ واتجاهه عموديًّا على $\vec{r}_i$. شكل ٨-٥ يوضح حالة ω موجبة (دوران في اتجاه عقارب الساعة)، إذا كانت ω سالبةً، فإن $\vec{v}_i$ تكون في الاتجاه المعاكس. وفي كلتا الحالتين:

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \omega\,|\,\vec{r}_i\,|^{\,2}\,\hat{j}, \tag{8-13}$$

حيث $\hat{j}$ متجه وحدة نحو داخل الصفحة.



شكل ٨-٥: سرعة النقطة الكتلية في جسم جاسئ دوَّار.

كمية التحرك الزاوية $\vec{L}$ للجسم حول نقطة الأصل O هي:

$$\vec{L} = I\omega\hat{j}, \tag{8-14}$$

حيث:

$$I = \sum_i m_i r_i^2. \tag{8-15}$$

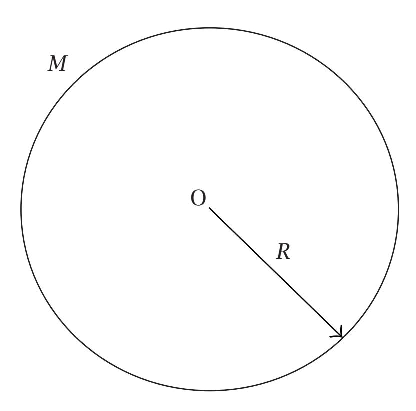
وبالنسبة للأجسام ذات الثلاثة أبعاد (تشمل كرة مركزها O) ولها تماثل كافٍ حول O، فإن المعادلتين (8-14) و(8-15) لا تزالان ساريتين بشرط أن يكون $\hat{j}$ هو محور الدوران و(في المعادلة (8-15)) r_i يحل محلها $r_{i\perp}$، المسافة العمودية من محور الدوران حتى m_i.

عادة ما يسمى I عزم القصور الذاتي للجسم حول المحور $\hat{j}$ خلال نقطة الأصل O. يسمى I أحيانًا «القصور الدوراني» للجسم. وهذا مصطلح ممتاز؛ لأن I في الحقيقة هي مقياس لمدى صعوبة تغير السرعة الزاوية لجسم ما مثلما أن M مقياس لمدى صعوبة تغير السرعة الخطية.

في مسألة ذات بُعدين يكون العزم عموديًّا على الصفحة $[\vec{\tau}_{\text{ext}} = \tau_{\text{ext}}\hat{j}]$ وبهذا تصبح المعادلة (8-11) $\tau_{\text{ext}} = I d\omega/dt$. بتعريف العجلة الزاوية $\alpha = d\omega/dt$ نحصل على:

$$\tau_{\text{ext}} = I\alpha. \tag{8-16}$$

المعادلة (8-16) هي «الوصفة العلاجية» التي كنا ننشدها؛ فهي تربط العجلة الزاوية لجسم جاسئ بالعزم المؤثر على الجسم، وهي تناظر بوضوح قانون نيوتن



شكل ٨-٦: طوق كتلته M ونصف قطره R.

الثاني (بإحلال العزم محل القوة، والعجلة الزاوية محل العجلة الخطية، والقصور الدوراني محل الكتلة).

نحتاج لاستخدام المعادلة (8-16) أن نعرف عزوم القصور الذاتي لبعض الأجسام الجاسئة البسيطة:

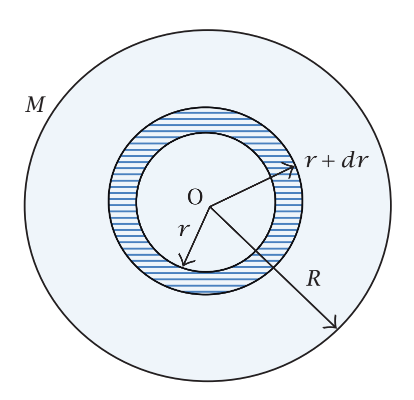
(أ) عزم قصور لطوق (كتلته m ونصف قطره R) حول مركزه (شكل ٨-٦). الكتلة كلها في هذه الحالة على نفس المسافة من نقطة الأصل O وبهذا يكون:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \left(\sum_i m_i\right) R^2 = MR^2. \qquad (8\text{–}17)$$

(ب) عزم قصور قرص منتظم (كتلته M ونصف قطره R) حول مركزه. في هذه الحالة تكون عناصر كتلية مختلفة على أبعاد مختلفة من نقطة الأصل. إذا قسمنا الجسم إلى حلقات عديدة (شكل ٨-٧)، فإن مساحة الحلقة المحدودة بدائرتين نصفا قطريهما r و$r + dr$ هي $2\pi r dr$، وكتلة هذه الحلقة هي $(2\pi r dr)\sigma$؛ حيث σ هي كتلة وحدة المساحات. عزم القصور هو:

$$I = \sum_i (2\pi r dr)\, \sigma r^2 = \int_0^R 2\pi\sigma r^3 dr = \pi\sigma\frac{R^4}{2}. \qquad (8\text{–}18)$$

كتلة القرص هي $M = \pi R^2 \sigma$، وبهذا يكون $I = (1/2)MR^2$. المعادلة (8-18) يكون لها معنى عند مقارنتها بالمعادلة (8-17)؛ لأنه في حالة القرص المنتظم يكون البعد «المتوسط» لعناصر الكتلة عن المركز أقل من R.



شكل ٨-٧: قرص مسطح نصف قطره R وكتلته M.

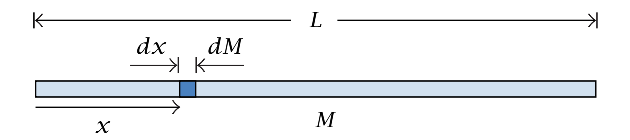
(ج) عزم قصور قضيب منتظم (كتلته M وطوله L) حول أحد طرفيه. اعتبر جزءًا صغيرًا من القضيب طوله dx وكتلته $(M/L)dx$، (انظر شكل ٨-٨). إذا قيس البعد x عن طرف القضيب، نجد أن:

$$I = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3}ML^2. \tag{8-19}$$

بالمثل، عزم قصور القضيب حول نقطة منتصفه هو:

$$I = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{1}{12}ML^2. \tag{8-20}$$

(د) عزم قصور طوق أو قرص منتظم حول نقطة على حافة (نحتاج إلى هذا إذا رغبنا في تطبيق المعادلة (8-16) على جسم يتدحرج بدون انزلاق على منحدر باستخدام نقطة التماس كنقطة أصل). في هذه الحالات يصعب إجراء التكامل. ومع ذلك، فإن نظرية بسيطة تمكِّننا من كتابة الإجابة فورًا بدلالة نتيجتيْ (أ) و(ب).



شكل ٨-٨: قضيب طوله L وكتلته M.

(٣) أمثلة للحركة الدورانية البسيطة

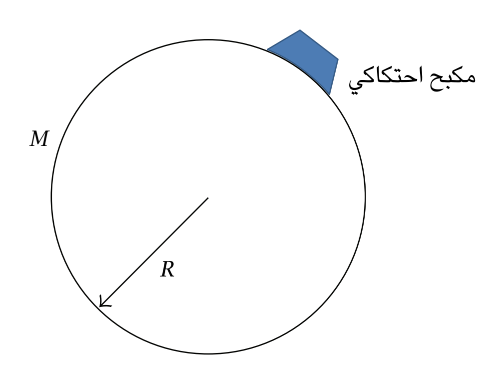
إذا كان I_0 هو عزم قصور جسم ذي بُعدين حول نقطة O، وكان I_{CM} عزم قصور نفس الجسم حول مركز كتلته، فإن $I_0 = I_{CM} + Ma^2$؛ حيث M الكتلة الكلية للجسم وa المسافة بين O ومركز الكتلة. برهان النظرية الواردة أعلاه، وجزئية الأبعاد الثلاثة للنظرية في ملحق (ب). باستخدام النظرية، نرى أن عزمَيْ قصور الطوق والقرص المنتظم حول نقطة على الحافة هما $2MR^2$ و$3/2MR^2$ على التوالي.

لقد طوَّرنا الآن عُدَّة كافية لحل بعض المسائل.

مثال ٨-٢ (حدافة ذات مكبح احتكاكي). حدافة عبارة عن قرص منتظم كتلته ١٠٠ كيلوجرام ونصف قطره ٠٫٥ متر، تدور في البداية بمعدل ٢٠ دورة كل ثانية. طُبِّق عليها مكبح احتكاكي عند حافتها يؤثر بقوة كبْح مماسية مقدارها ٢٠٫٠ نيوتن، احسب:

(أ) الزمن الذي تستغرقه الحدافة حتى تتوقف.
(ب) عدد الدورات التي تتمُّها بدءًا من لحظة تطبيق المكبح حتى تتوقف.

الحل. أولًا سنبدأ حلَّ المسالة بالرموز، وللتبسيط سنفترض أن الحدافة تلف في اتجاه عقارب الساعة. المركبة المماسية F لقوة المكبح تعمل في عكس اتجاه عقارب الساعة (لاحظ أن المركبة نصف القطرية للقوة التي يبذلها المكبح لا ينتج عنها عزم حول مركز الحدافة). المكبح يُحدث عزمًا في عكس اتجاه عقارب الساعة مقداره FR (حيث R = نصف القطر). لدينا من المعادلة (8-16): $-FR = (1/2)MR^2\alpha$ وبهذا يكون $\alpha = -2F/MR$ إذا كان عدد الدورات لكل ثانية في البداية هو n_0، فإن السرعة الزاوية الابتدائية تكون $\omega_0 = 2\pi n_0$.



شكل ٨-٩: حدافة ذات مكبح احتكاكي.

نلاحظ الآن أن «معادلات الحركة المستنتجة في الفصل الأول لوصف حركة أحادية البعد بعجلة ثابتة تنطبق بالتساوي تمامًا على الحركة الدورانية بعجلة زاوية ثابتة»، مع تغيير مناسب للرموز ($x \to \theta, v \to \omega, a \to \alpha$). تكون الاستنتاجات مماثلة لتلك التي وردت في الفصل الأول. بناءً على ذلك يكون لدينا:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2, \tag{8–21}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \tag{8–22}$$

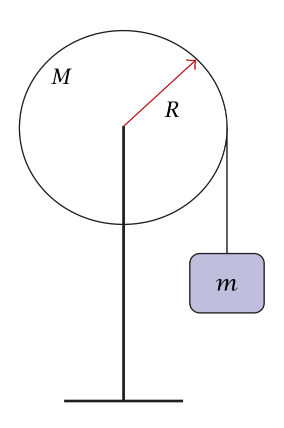
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\left(\theta - \theta_0\right), \tag{8–23}$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\left(\omega_0 + \omega\right)t. \tag{8–24}$$

نعرِّف θ على أنها موجبة في اتجاه عقارب الساعة، بالاتساق مع اتفاقنا على أن ω موجبة للدوران مع عقارب الساعة.

الزمن T اللازم لتوقف الحدافة يعطى من المعادلة (8–22)؛ بوضع $\omega = 0$، نجد أن $T = -\omega_0/\alpha = MR\omega_0/(2F)$. الزاوية θ التي تدورها الحدافة أثناء توقفها تُحسب بسهولة أكثر من المعادلة (8–24) التي تعطي $\theta = (1/2)\omega_0 T = (1/4)MR\omega_0^2/F$.

عدد الدورات التي تلفُّها الحدافة أثناء التوقف يساوي $\theta/2\pi$. بإدخال الأرقام نجد أن $\alpha = -0.800\,\text{rad/s}^2$، $\omega_0 = 40.0\pi\,\text{rad/s}$، $T = 157\,\text{s}$، عدد الدورات = ١٥٧٠ دورة.



شكل ٨-١٠: حدافة كتلتها M مع ثقل كتلته m.

مثال ٨-٣ (حدافة متصلة بثقل). في شكل ٨-١٠ الحدافة عبارة عن قرص منتظم كتلته M ونصف قطره R، والخيط (عديم الوزن) لا ينزلق بالنسبة للحدافة. احسب عجلة القالب (الثقل)، والعجلة الزاوية للحدافة، والقوة التي يؤثر بها المحور على الحدافة.

الحل. دعنا نُسَمِّ العجلة الزاوية للحدافة α وعجلة الثقل إلى أسفل a (أي إن عجلة الثقل هي $a\hat{e}$؛ حيث $\hat{e}$ متجه وحدة يشير رأسيًّا إلى أسفل). نتوقع في هذه المسألة أن يكون كلٌّ من α وa موجبًا. سنكتب معادلة العزم للحدافة ومعادلة القوة للقالب. تنص معادلة العزم للحدافة على أن:

$$TR = \frac{1}{2}MR^2\alpha, \tag{8-25}$$

حيث T الشد في الخيط. ومعادلة القوة للقالب تنص على:

$$mg - T = ma. \tag{8-26}$$

(من الخطأ الشائع افتراض أن $T = mg$ عند كتابة معادلة العزم. لو كان الأمر كذلك لما تحرك القالب بعجلة). المعادلتان (8-25) و(8-26) في مجاهيل ثلاثة هي α وa وT. المعلومة المفتقدة هي العلاقة الكينماتيكية بين a وα، التي تنتج من حقيقة أن الطول الكلي للخيط يظل ثابتًا. إذا كانت الحدافة تدور زاوية صغيرة $\Delta\theta$ ($\Delta\theta$ موجبة للدوران مع عقارب الساعة)، فإن طول الخيط الذي يتحرر من الحدافة يساوي $R\Delta\theta$؛ وبناءً على هذا، فإن القالب يجب أن يهبط مسافة Δx؛ حيث:

$$\Delta x = R\Delta\theta. \tag{8-27}$$

بقسمة كلا طرفي المعادلة (8-27) على Δt وجعل $\Delta t \to 0$ نجد أن:

$$\frac{dx}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \tag{8-28}$$

وبتفاصيل المعادلة (8-28) بالنسبة إلى t نجد أن:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = R\alpha. \tag{8-29}$$

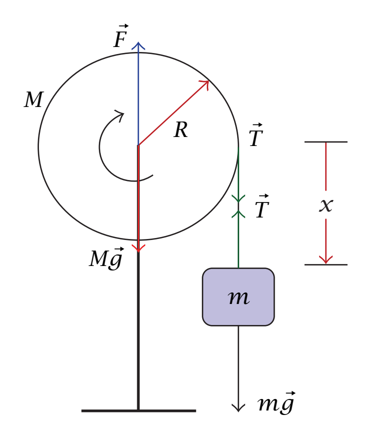
وبإدخال المعادلة (8-29) في المعادلة (8-25) نحصل على $T = (1/2)Ma$، وينتج من المعادلة (8-26) أن:

$$a = \frac{g}{1 + M/2m} = R\alpha. \tag{8-30}$$

لإيجاد القوة التي يبذلها المحور على قرص الحدافة نعتبر نظامنا عبارة عن قرص الحدافة مضافًا إليه طولٌ أكبر قليلًا من طول الخيط الملفوف على الحدافة (انظر شكل ٨-١١). مركز كتلة هذا النظام ساكن بصورة مستديمة؛ ولذا فإن القوة المؤثرة على النظام تتلاشى. القوى المؤثرة على النظام هي $\vec{T}$ (المؤثرة لأسفل)، و$M\vec{g}$ (المؤثرة لأعلى)، وقوة ما $\vec{F}$ مبذولة بواسطة المحور. بما أن $F - T - Mg = 0$، فإن:

$$F = T + Mg = Mg\frac{3 + M/m}{2 + M/m}. \tag{8-31}$$

يمكننا أيضًا إيجاد F بتطبيق المعادلة (3-10) [$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i m_i\vec{a}_i$] على النظام (قرص الحدافة + القالب + الخيط)، والحصول على $F - (M + m)g = -ma$. يؤدي هذا إلى نفس قيمة F كما في الطريقة السابقة.

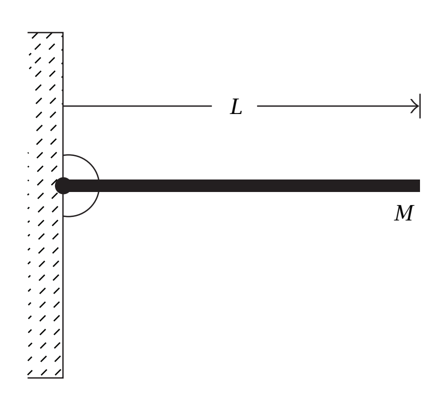


شكل ٨-١١: القوى المؤثرة على القالب والحدافة في مثال ٨-٣.

مثال ٨-٤ (قضيب متصل بحائط عن طريق مفصل). قضيب منتظم طوله L وكتلته M متصل بحائط عن طريق مفصل أملس عند طرفة الأيسر. في البداية كان الطرف الأيمن للقضيب مستندًا على دعامة بحيث يكون متزنًا في وضع أفقي، ثم أُزيلت الدعامة فجأة. احسب:

(أ) القوة $\vec{F}$ التي يبذلها المفصل على القضيب قبل إزالة الدعامة.
(ب) العجلة الزاوية للقضيب بعد إزالة الدعامة مباشرة.
(ج) القوة $\vec{F}'$ التي يبذلها المفصل على القضيب بعد إزالة الدعامة مباشرة.

الحل. الجزء (أ) عبارة عن مسألة في الاتزان الاستاتيكي. بأخذ العزوم حول الطرف الأيمن للقضيب، يكون لدينا $FL - MgL/2 = 0 \rightarrow F = Mg/2$. عند الاتزان يجب أيضًا أن تُبذَل قوة $Mg/2$ على الطرف الأيمن. بعد تحرُّر القضيب، سنأخذ العزوم حول نقطة الأصل عند المفصل (وبناءً عليه لن تظهر القوة التي يبذلها المفصل في معادلة العزم). العزم الوحيد ينتج عن طريق قوة الجاذبية (المؤثرة على مركز الكتلة)، ونحصل بعد إزاحة الدعامة مباشرة على $MgL/2 = 1/3ML^2\alpha$، وهكذا فإن $\alpha = 3/2g/L$. وبما أن الطرف الأيمن متحرك في دائرة نصف قطرها L، فإن عجلته المماسية (الرأسية) هي $L\alpha$؛ أي $3/2g$. يمكن التحقق بتوضيح بسيط (شكل ٨-١٣) من حقيقة أنه لدى

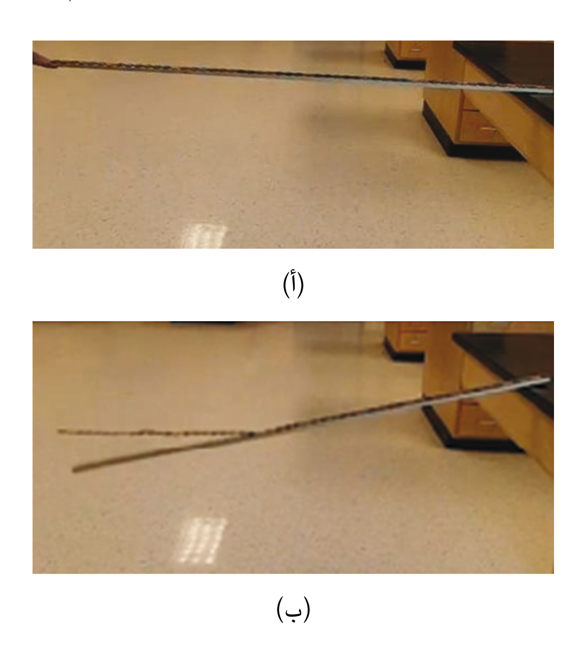


شكل ٨-١٢: قضيب متصل بحائط عن طريق مفصل.

الطرف الأيمن عجلة رأسية أكبر من g. إذا انتظمت مسطرة مترية بحيث يرتكز أحد طرفيها على منضدة، أو توصل بمفصلة في الحائط بحيث يمكن لهذه العصا المترية أن تتأرجح بحُرِّية في الاتجاه الرأسي؛ فإن صفًّا من البنسات بطول قمة العصا المترية عندما يُمسَك به أفقيًّا سوف يُبيِّن تأثير طرف العصا المترية الهابطة بعجلة أكبر من عجلة الجاذبية التثاقلية. تُظهر الصورة بوضوح خط البنسات وهو «يترك» العصا أثناء تأرجحها إلى أسفل. بالمثل، إذا كان عدد من الأشخاص جالسين على مزلجة فوق منحدر زلق به نتوء، فإن المزلجة سوف تسقط بعيدًا من جهة الشخص الأمامي ما لم يكن ممسكًا بمقبض.

لإيجاد القوة التي يبذلها المفصل بعد إزالة الدعامة مباشرة، نطبق قانون القوة $[\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{A}_{\text{CM}}]$ على القضيب عند هذه اللحظة. عجلة مركز الكتلة هي $(1/2)L\alpha$ أو $3/4g$ رأسيًّا إلى أسفل. القوتان المؤثرتان على القضيب هما Mg (إلى أسفل) والقوة F' إلى أعلى التي يبذلها المفصل. وبهذا يكون $F' - Mg = M(-3g/4)$، ومن ثم يكون $F' = Mg/4$. لاحظ أن القوة التي يبذلها المفصل تغير قيمتها (من $Mg/2$ إلى $Mg/4$) فجأة عند لحظة التحرر.

يمكن أيضًا الحصول على القوة $\vec{F}'$ بكتابة معادلة العزم، باستخدام مركز الكتلة كنقطة أصل (تذكر أن المعادلة (8-11) صحيحة أيضًا في هذه الحالة) ويمكن استخدام المعادلة (8-2) لحساب كمية التحرك الزاوية لجسم جاسئ حول مركز كتلته بشرط



(أ)

(ب)

شكل ٨-١٣: عصا مترية مصفوف عليها خط بنسات تحررت عند أحد طرفيها.

أن نستخدم I_{CM} عزمًا للقصور الذاتي. لاحظ أنه عندما نكتب معادلة العزم حول مركز الكتلة CM، فإن الجاذبية لا تسبب عزمًا ما دام يمكن اعتبار أنها تؤثر على مركز الكتلة؛ لكن القوة الرأسية F' التي يبذلها المفصل تُنتج عزمًا $F'L/2$ مع عقارب الساعة. وهكذا تكون معادلة العزم حول CM هي:

$$F'\frac{L}{2} = \frac{1}{12}ML^2\alpha. \tag{8-32}$$

بإدخال $F' = 1/4Mg$، نحصل على $\alpha = 3/2g/L$، وهو ما يوافق الحساب السابق.

يسهل الآن بيان أن تلاشي القوة الخارجية والعزم ليس ضروريًّا فقط، بل أيضًا كافٍ لتأكيد اتزان الجسم الجاسئ، بشرط أن تكون جميع نقاط الجسم ساكنة عند لحظة ما، أو تكون في حالة حركة منتظمة. إذا تلاشت القوة الخارجية، فإن مركز الكتلة يظل ساكنًا، أو يتحرك بسرعة ثابتة. لقد رأينا للتوِّ أنه إذا تلاشت القوة الخارجية



شكل ٨-١٤: مزلجة فوق منحدر زلق به نتوء. الطرف الأمامي يسقط أسرع من g. انظر مثال ٨-٤.

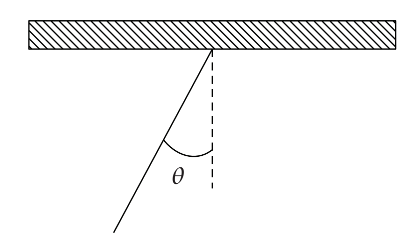
وتلاشى العزم الخارجي حول نقطة أصل ما، فإن العزم الخارجي حول أي نقطة أصل (بما في ذلك مركز الكتلة) يتلاشى. وبما أن لدينا:

$$\tau_{\text{CM}} = I_{\text{CM}} \frac{d\omega}{dt} \tag{8-33}$$

فإنه ينتج أن تكون ω = ثابت؛ ومن ثم تكون $\omega = 0$؛ لأن الجسم عند لحظة ما لا يكون دوَّارًا [بدون هذا الافتراض يكون من الممكن للجسم أن يدور بسرعة زاوية ثابتة]. إذا كان $\omega = 0$، فإن السرعة النسبية لأي نقطتين على الجسم تساوي صفرًا، ومن ثم تكون جميع النقاط لها نفس السرعة مثل مركز الكتلة. يعمم البرهان بسهولة على ثلاثة أبعاد.

مثال ٨-٥ (قضيب متأرجح موصل بالسقف عن طريق مفصل). قضيب منتظم (كتلته M وطوله L) موصَّل بالسقف عن طريق مفصل أملس، ويتذبذب بسعة زاوية صغيرة في مستوى رأسي. احسب الزمن الدوري للتذبذب.

الحل. لتكن θ هي الزاوية بين القضيب والرأسي. لحفظ التناسق مع مصطلح الإشارات التي نستخدمها، تكون θ موجبة عندما يُترك القضيب إلى يسار الرأسي (وبهذا تزداد θ كلما يدور القضيب مع عقارب الساعة). يُعزى العزم الوحيد حول المفصل إلى الجاذبية



شكل ٨-١٥: قضيب متصل بسقف عن طريق مفصل أملس.

$\tau = (-MgL/2)\sin\theta$ (الإشارة السالبة تعني أن العزم في عكس اتجاه عقارب الساعة للزاوية θ الموجبة). وعلى ذلك فإن معادلة العزم هي:

$$-Mg\frac{L}{2}\sin\theta = \frac{1}{3}ML^2\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{8-34}$$

هذه هي المعادلة التامة لوصف ذبذبات القضيب. إذا كانت صغيرة يمكننا إحلال θ محل $\sin\theta$ لنحصل على:

$$\frac{1}{3}ML^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{1}{2}MgL\theta. \tag{8-35}$$

هذه المعادلة التفاضلية من النوع الذي درسناه في الفصل السادس. يتحرك القضيب حركة توافقية بسيطة؛ أي إن:

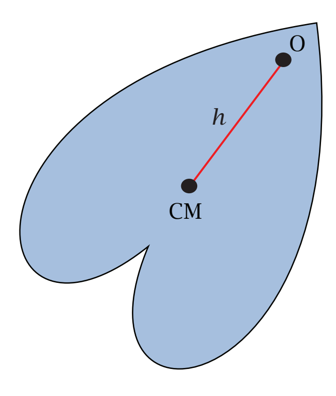
$$\theta(t) = \theta_{\max}\cos(\omega t + \delta), \tag{8-36}$$

حيث $\omega^2 = (MgL/2)/(ML^2/3) = 3/2g/L$. ويكون الزمن الدوري هو:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}. \tag{8-37}$$

وبصورة أعم، إذا كان الجسم يتذبذب حول محور يمر خلال نقطة O، فإن معادلة العزم هي:

$$-Mgh\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}, \tag{8-38}$$



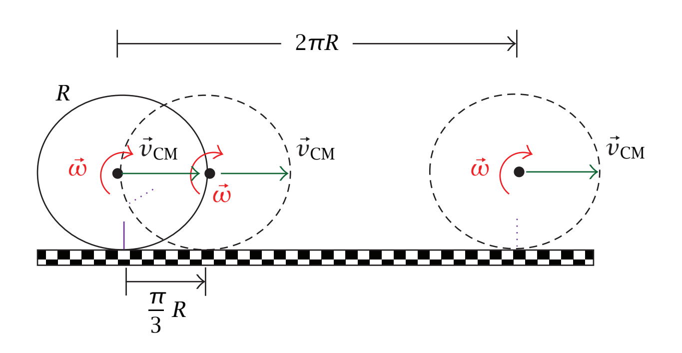
شكل ٨-١٦: جسم اختياري الشكل وحر لأن يتذبذب حول نقطة O تحت تأثير الجاذبية. انظر المثال ٨-٥.

حيث h هي المسافة من O إلى مركز الكتلة CM وI عزم القصور الذاتي حول O. في حالة الذبذبات الصغيرة نضع θ بدلًا من $\sin\theta$ ويكون لدينا حركة توافقية بسيطة لها: $\omega^2 = Mgh/I$ وفترة زمنية $T = 2\pi\sqrt{I/Mgh}$.

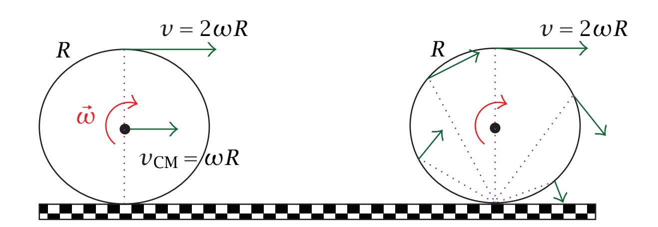
(٤) حركة الدحرجة

قبل مناقشة المثال المشتمل على عجلات تتدحرج على سطح ما دون انزلاق، من المفيد أن يؤخذ في الاعتبار ماذا تعني الدحرجة بدون انزلاق. يقال لعجلة ما إنها تتدحرج بدون انزلاق إذا كانت في جميع الأوقات تحقق شرط أن يكون جزيء العجلة الملامس للأرض له سرعة «لحظية» تساوي صفرًا (أي إن الجزيء يكون ساكنًا بالنسبة للأرض). بطبيعة الحال، ليس ضروريًّا أن نتحدث عن جزيئات مفردة؛ إذا وضعت علامة ملونة على حافة العجلة التي تتدحرج بدون انزلاق، فإن العلامة تكون سرعتها صفرية عند اللحظة التي تلامس فيها الأرض. على سبيل التباين، نلاحظ أنه إذا كبح (فَرْمَل) السائق السيارة وتدحرج (بدون انحراف)، فإن قاعدة جزيء الإطار تكون لها سرعة أمامية محدودة بالنسبة للأرض (هذا واضح في الحالة المتطرفة عند كبْح العجلات). إذا قام السائق بتسريع السيارة بعنف بأن يدوس بشدة على المعجِّل، فإن الجزيء السفلي لكلٍّ

من عجلتَيِ القيادة يكون له سرعة ارتداد بالنسبة للطريق (حتى لو كانت السيارة لها سرعة أمامية).



شكل ٨-١٧: جسم دائري نصف قطره R يتدحرج بدون انزلاق على سطح أفقي، السرعة الزاوية هي $\vec{\omega}$ ومقدار سرعة مركز الكتلة هو $v_{CM} = \omega R$.

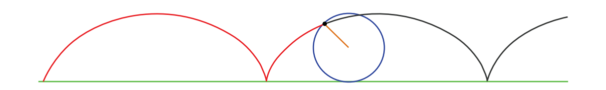


شكل ٨-١٨: جسم دائري نصف قطره R يتدحرج بدون انزلاق على سطح أفقي، وله دائمًا نقطة تماس مع السطح ساكنة لحظيًّا. يمكن حساب مقدار سرعة أي نقطة أخرى على الجسم بافتراض أن نقطة التماس هي المحور اللحظي للدوران.

إذا كان جزيء العجلة الأسفل ساكنًا، فإن سرعات جميع الجزيئات الأخرى يمكن حسابها على اعتبار أن العجلة تدور حول محور يمر خلال الجزيء السفلي (نقطة التماس) وتكون ساكنة لحظيًّا. بناءً على ذلك، يكون مقدار سرعة جزيء على بُعد d

من نقطة التماس هو ωd (حيث ω السرعة الزاوية)، ويكون اتجاه السرعة عموديًّا على الخط الواصل من نقطة التماس إلى الجزيء.

في شكل ٨-١٨ نعرض متجهات السرعة للجزيئات المختلفة على العجلة التي تتدحرج (في اتجاه عقارب الساعة) بدون انزلاق. نحصل على سرعة مركز العجلة بوضع d تساوي نصف قطر العجلة R؛ مقدار السرعة هو $v = \omega R$ واتجاهها يوازي الطريق. لاحظ أن مقدار سرعة أعلى جزيء على العجلة هو $2\omega R$ واتجاهه إلى الأمام؛ وبذلك نرى أنه إذا كانت سيارة تتحرك بسرعة ٦٠ ميلًا في الساعة، فإن سرعة علامة ملونة منقوشة على الإطار هي 120 mph عندما تكون على قمة الإطار و0 mph عندما تكون عند قاع الإطار. يأخذ مسار العلامة شكل السيكلويد (الدويري) الموضح في شكل ٨-١٩ [استنتج المعادلة!] يمكن تفاضل $v = \omega R$ بالنسبة للزمن للحصول على $a = \alpha R$ [تسارُع مركز العجلة المتدحرجة بدون انزلاق].

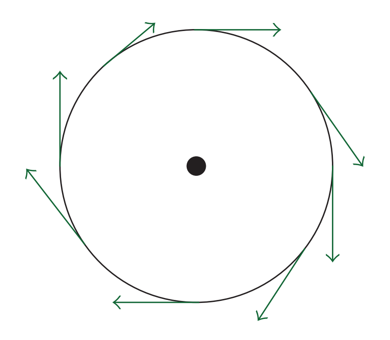


شكل ٨-١٩: الدويري هو الشكل الذي ترسمه نقطة على عجلة تتدحرج بدون انزلاق على سطح مستوٍ.

بدلًا من التفكير في العجلة التي تدور حول محور ساكن لحظيًّا، وتمر خلال نقطة التماس، يمكننا أن نفكر بطريقة مكافئة في العجلة عندما تدور حول محور متحرك خلال مركزه. (السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ هي نفسها أيًّما الوصفين استخدمنا. إذا رسمنا خطًّا قصيرًا ملونًا على جانب، فإن $\vec{\omega}$ تعرَّف بمعدل تغير الاتجاه الذي يشير إليه هذا الخط.) للمحور المتحرك مقدار سرعة ωR واتجاهها إلى اليمين. يوضح شكل ٨-٢٠ سرعات الجزيئات المختلفة بالنسبة إلى محور خلال المركز. إذا أضفنا سرعة المركز إلى جميع متجهات السرعة في شكل ٨-٢٠ بالجمع المتجهي، فإن سرعة أدنى جزيء تكون ωR (في اتجاه اليسار) بالنسبة للمركز؛ وبإضافة هذا إلى سرعة المركز نجد أن صافي السرعة يساوي صفرًا. بالنسبة للجزيء العلوي، السرعتان لهما نفس الإشارة ونجد أن $v = 2\omega R$. ميزة هذه الطريقة في التفكير بشأن الحركة أنها تمكِّننا

من فهم سرعات الجزيئات المفردة على عجلة تنزلق أثناء تدحرجها. في هذه الحالة، مقدار سرعة المركز v لا يساوي ωR، لكننا ما نزال نستطيع الحصول على سرعات جميع الجزيئات بإضافة $\vec{v}$ متجهي إلى السرعات الموضحة في شكل ٨-٢٠. ولسوف نستخدم هذه الملاحظات في مناقشة حركة كرة بلياردو تتدحرج (مثال ٨–٨).

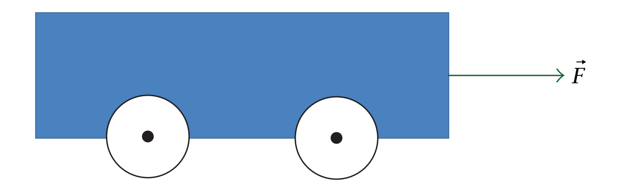
توضح المناقشة السابقة حقيقة أنه يمكن تحقيق حركة معينة لجسم جاسئ بالجمع بين الانتقال والدوران بطرق متنوعة. موضع محور الدوران اللحظي في الفراغ ليس معرَّفًا على نحو عديم النظير، لكن السرعة الزاوية لمحور الدوران واتجاهه محددان تمامًا.



شكل ٨-٢٠: عجلة تدور حول محور خلال مركزها، أو عجلة تتدحرج بطول سطح مسطح كما يُرى من إطار إسناد متحرك مع مركز العجلة، ولها سرعات جزيء كما هو مبين.

مثال ٨–٦ (عربة مسحوبة بحيث تتدحرج عجلاتها دون انزلاق). تتكون العربة من جسم كتلته M، بالإضافة إلى أربع عجلات، كلٌّ منها عبارة عن قرص جاسئ كتلته m ونصف قطره R. العجلات متصلة بمحاور عن طريق سنادات، وتتدحرج بدون انزلاق على طريق أفقي. يبذل حصان قوة أفقية $\vec{F}$ على العربة. احسب تسارع العربة.

الحل. يجب التأكيد هنا على نقطة مهمة: المعادلة $\vec{F}_{\text{ext}} = (\text{الكتلة الكلية}) \cdot \vec{A}_{\text{CM}}$ يمكن تطبيقها على أي نظام بدون استثناء (يبدو أن بعض الطلاب يعتقدون بأن المعادلة



شكل ٨-٢١: عربة مسحوبة بحيث تتدحرج عجلاتها دون انزلاق على طريق أفقي.

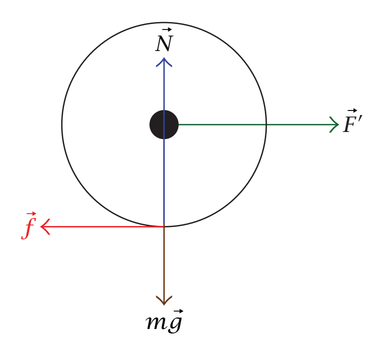
لا تطبق على الأجسام الدوَّارة)؛ وبناء على ذلك، إذا اعتبرنا نظامنا مكونًا من العربة بأكملها (الجسم + العجلات)، فهل يمكننا استخلاص أن العجلة تساوي F مقسومة على الكتلة الكلية $M + 4m$؟ كلَّا؛ لأن F ليست القوة الخارجية الكلية المؤثرة على النظام. فالأرض تبذل قوى أفقية على العجلات، وهذه القوى يجب تضمينها في صافي القوة الخارجية (الأرض أيضًا تبذل قوى رأسية تتلاشى بتأثير قوة الجاذبية التثاقلية على النظام).

إذا ركزنا انتباهنا على أي عجلة بصورة خاصة (كما هو موضح في شكل ٨-٢٢)، فإننا نستطيع كتابة معادلة العزم للعجلة حول نقطة الأصل عند مركز العجلة (هذه ليست نقطة أصل قصورية ولكنها مسموح بها لأنها مركز كتلة العجلة). ينتج العزم الوحيد حول نقطة الأصل هذه بواسطة القوة الأفقية التي تبذلها الأرض على العجلة. القوى الأخرى كلها ليست لها ذراع رافعة؛ لأنها إما تؤثر عند المحور، أو تكون متجهة بطول الخط بين نقطة تطبيق القوة والمتجه نصف القطري من المحور إلى تلك النقطة. وحيث إن السرعة الزاوية والتسارع الزاوي للعجلة مع عقارب الساعة موجبان (طبقًا لمصطلحات الإشارة)، فإن القوة الأفقية $\vec{f}$ التي تبذلها الأرض يجب أن تتجه إلى اليسار (شكل ٨-٢٢). معادلة العزم للعجلة هي:

$$fR = \frac{1}{2}mR^2\alpha = \frac{1}{2}mR^2\frac{a}{R}, \qquad (8\text{–}39)$$

حيث α التسارع الزاوي وa مقدار التسارع الخطي لمركز العجلة (وهو نفس مقدار تسارع CM للعربة كلها). وبما أن جميع العجلات لها نفس a، فإن القوة الأفقية f هي نفسها لجميع العجلات. معادلة القوة للعربة بأكملها (الجسم + العجلات) هي:

$$F - 4f = (M + 4m)\,a. \qquad (8\text{–}40)$$



شكل ٨-٢٢: القوى المؤثرة على إحدى عجلات العربة. $\vec{F}'$ هي القوة الأفقية التي يبذلها المحور، و$\vec{N}$ هي مجموع القوى الرأسية التي تبذلها الأرض على المحور.

لدينا معادلتان في مجهولين f وa بحلِّهما نجد أن $a = F/(M + 6m)$ و$f = (mF/2)/(M + 6m)$. صافي القوة الأفقية على العجلة يجب أن يتجه إلى الأمام؛ لأن CM للعجلة متسارع إلى الأمام. إذا كان F' مقدار القوة الأفقية التي يبذلها المحور على العجلة، فإن معادلة القوة للعجلة تكون $F' - f = ma$. بإدخال قيمتَي f وa نجد أن $F' = (3/2)(mF)/(M + 6m)$. القوتان الأفقيتان المؤثرتان على جسم العربة هما $\vec{F}$ للأمام و$4F'$ للخلف. بذلك تكون معادلة القوة للجسم هي:

$$F - 4F' = Ma. \qquad (8\text{–}41)$$

بإدخال قيمتَي F' وa المحسوبتين، نجد أن المعادلة (8–41) في حقيقة الأمر مستوفية للشروط.

سوف نناقش بعض الأمثلة البسيطة المشتملة على حركة أجسام ليست ثنائية البعد تمامًا. مناقشة حركة جسم جاسئ ثلاثي الأبعاد تعتبر — في الحالات الأكثر عمومية — معقدةً إلى حد ما؛ لأن متجهَي كمية التحرك الزاوية والسرعة الزاوية ليسا متوازيين بالضرورة، إلا أنه يمكن معالجة حالات بسيطة معينة بسهولة. ولسوف نُعنى فقط بالكرات (المصمتة والجوفاء) والأسطوانات الدائرية القائمة (المصمتة أو الجوفاء). فضلًا عن ذلك، سوف نعتبر فقط حركاتٍ تكون فيها سرعات جميع الجزيئات موازية دائمًا لمستوى الصفحة؛ نصرُّ في حالة الأسطوانة على أن يكون محور الأسطوانة عموديًّا

على الصفحة. تعرَّف السرعة الزاوية $\vec{\omega}$ كما في الحالة ثنائية البعد؛ إذا اعتبرنا شريحة رقيقة من الجسم بين مستويين موازيين للصفحة فإن $\vec{\omega}$ تكون هي السرعة الزاوية لتلك الشريحة (أي إن $\vec{\omega} = \omega\hat{j}$).

لاستخدام المعادلة (8-4) نحتاج التعبير عن $\vec{L}$ بدلالة. نفترض أن نقطة الأصل O، والمطلوب حساب $\vec{L}$ حولها، هي نقطة جسم مثبتة (أيْ نقطة مثبتة في الجسم) في المستوى المنصِّف للجسم. المستوى المنصِّف للكرة هو المستوى الموازي للصفحة والمحتوي على مركز الكرة. المستوى المنصِّف للأسطوانة القائمة هو المستوى الموازي للصفحة وعلى مسافة متساوية من طرفَي الأسطوانة. بمجرد استقرار المستوى المنصِّف، يصبح من السهل بيان (الملحق (ب)) أن كمية التحرك الزاوية $\vec{L}$ حول نقطة الأصل O هي:

$$\vec{L} = I\omega\hat{j} \quad \text{where } I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \tag{8-42}$$

و$r_{i\perp}$ هو بُعد الجسم i عن محور عمودي على الصفحة ويمر خلال O. إذا أخذنا المحورين x وz في مستوى الصفحة، فإن $r_{i\perp}^2 = x_i^2 + z_i^2$، وبهذا يكون $I = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2)$. وإذا كان O إما CM للجسم أو نقطة الأصل لإطار قصوري (مثلًا، إذا كان هناك محور ثابت يمر خلال O)، فإننا نستطيع استخدام معادلة العزم (المعادلة (8-4)). وبما أن $\vec{L}$ لها اتجاه $\hat{j}$، فإن العزم يجب أن يكون نفس هذا الاتجاه ($\vec{\tau}_{\text{ext}} = \tau_{\text{ext}}\hat{j}$) ونحصل على:

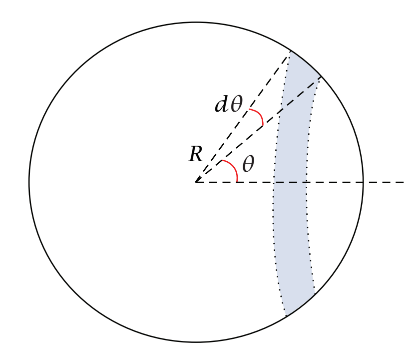
$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha} \tag{8-43}$$

وهي تماثل المعادلة (8-16) على أن يعاد تعريف I.

يتضح من المعادلة (8-42) أن عزم القصور الذاتي له نفس القيمة لجميع النقاط O على محور معين، ومن ثم يمكن الحديث عن عزم القصور حول محور معين. يمكن اعتبار الأسطوانة القائمة على أنها مكونة من شرائح عديدة متماثلة.يستتبع هذا أن المعادلات ثنائية البعد صحيحة أيضًا للأسطوانة القائمة. وإذا كان المحور موازيًا لمحور الأسطوانة فإن:

I لأسطوانة جوفاء حول المحور المار بالمركز = MR^2.

I لأسطوانة جوفاء حول المحور المار بنقطة على الحافة = $2MR^2$.



شكل ٨-٢٣: قسمنا الكرة الجوفاء بمستويات عمودية على محور.

I لأسطوانة مصمتة حول المحور المار بالمركز = $(1/2)MR^2$.
I لأسطوانة مصمتة حول المحور المار بنقطة على الحافة = $(3/2)MR^2$.

لحساب عزم القصور الذاتي لكرة جوفاء حول محور يمر بمركزها، نقسم سطح الكرة إلى حلقات عديدة (شكل ٨-٢٣). يتم عمل هذا بسهولة في الإحداثيات القطبية، إذا كانت θ زاوية قطبية بالنسبة للمحور، فإن البعد عن المحور يكون $R\sin\theta$ ومساحة الحلقة التي عرْضُها الزاوي $d\theta$ هي $(2\pi R\sin\theta)(Rd\theta)$. كتلة الحلقة تساوي مساحتها مضروبة في الكتلة لوحدة المساحات (التي نسميها σ)، بهذا يكون عزم القصور الذاتي هو:

$$I = \int_0^\pi \sigma\, (2\pi R\sin\theta)\, (Rd\theta)\, (R\sin\theta)^2 = \frac{8}{3}\pi\sigma R^4. \qquad (8\text{-}44)$$

وبما أن الكتلة هي $M = 4\pi R^2\sigma$، يكون لدينا:

$$I = \frac{2}{3}MR^2 \qquad (8\text{-}45)$$

وهي (كرة جوفاء حول محور خلال مركز)، [يمكن الحصول على استنتاج سريع للمعادلة (45-8) بملاحظة أنه إذا كانت الكتلة موزعة بانتظام على سطح الكرة يكون

لدينا، بالتماثل، $\sum_i m_i x_i^2 = \sum_i m_i y_i^2 = \sum_i m_i z_i^2$ ولكن $\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) =$ MR^2. إذن $\sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) = (2/3)MR^2$.]

عزم القصور الذاتي لكرة جوفاء حول محور مماس للكرة ينتج باستخدام نظرية المحور الموازي (ملحق (ب))؛ أي إن:

$$I = \frac{2}{3}MR^2 + MR^2 = \frac{5}{3}MR^2. \tag{8-46}$$

لإيجاد عزم القصور الذاتي لكرة مصمتة حول محور خلال مركزها، نعتبر الكرة كأنها «بصلة» مكونة من أغلفة كروية عديدة. نعلم عزم القصور الذاتي للغلاف. بقية الحسابات تمرين للقارئ. أخيرًا، نجد أن $I = (2/5)MR^2$ (كرة مصمتة حول محور يمر بالمركز) لاحظ أن هذا — كما هو متوقع — أصغر من I (حول نفس المحور) لكرة جوفاء لها نفس الكتلة ونصف القطر. I لكرة جاسئة حول محور مماس للكرة يكون:

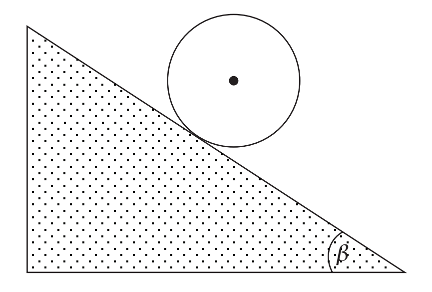
$$\frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2. \tag{8-47}$$

الآن يمكننا مناقشة مثال يشتمل على كرات وأسطوانات.

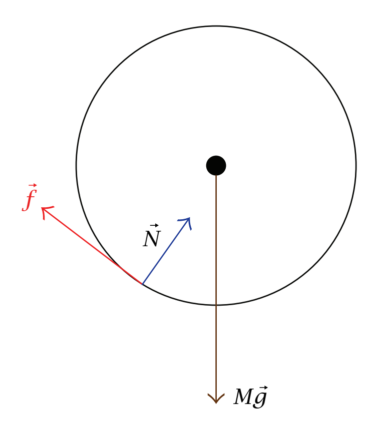
مثال ٨–٧ (كرة مصمتة تتدحرج بدون انزلاق على منحدر لأسفل). كرة مصمتة (كتلتها M ونصف قطرها R) تتدحرج بدون انزلاق إلى أسفل مستوى منحدر (بزاوية β على الأفقي). احسب عجلة مركز الكرة. كرر نفس الشيء لكرة جوفاء، وأسطوانة مصمتة، وأسطوانة جوفاء. إذا عقدنا سباقًا إلى أسفل لهذه الأجسام الأربعة، فأيُّها سوف يفوز؟

الحل. القوى المؤثرة على الكرة موضحة في شكل ٨-٢٥. تنتج القوة المماسية $\vec{f}$ بالاحتكاك الاستاتيكي إذا لم تنزلق الكرة. معادلة العزم للكرة حول نقطة أصل عند مركزها هي $fR = I_{\mathrm{CM}}\alpha$. يجب أن يكون للقوة $\vec{f}$ الاتجاه الموضح (إلى أعلى) لكي يكون التسارع الزاوي α موجبًا (مع عقارب الساعة). معادلة القوة للكرة (أي مركبة $\vec{F} = m\vec{a}$ الموازية للمستوى المائل) هي $Mg\sin\beta - f = Ma$؛ حيث a التسارع (موجب في اتجاه أسفل المنحدر). إذا لم تنزلق الكرة، فإن $a = \alpha R$. لدينا معادلتان في مجهولين f وa بالحل نجد أن:

$$a = \frac{g\sin\beta}{1 + I_{\mathrm{CM}}/MR^2}, \qquad f = \frac{Mg\sin\beta}{1 + MR^2/I_{\mathrm{CM}}}. \tag{8-48}$$



شكل ٨-٢٤: كرة مصمتة تتدحرج بدون انزلاق على منحدر لأسفل.



شكل ٨-٢٥: القوى المؤثرة على كرة مصمتة أثناء دحرجتها لأسفل المستوى المائل.

النسبة I_{CM}/MR^2 تأخذ القيم $2/5$ و$2/3$ و$1/2$ و1 للكرة المصمتة، والكرة الجوفاء، والأسطوانة المصمتة، والأسطوانة الجوفاء، على الترتيب، وبناءً على ذلك تفوز الكرة المصمتة في السباق، تتبعها الأسطوانة المصمتة، ثم الكرة الجوفاء، ثم الأسطوانة الجوفاء (بنفس ذلك الترتيب).

لاحظ أن التسارع a لا يعتمد على كتلة الجسم أو نصف قطره؛ ولذا فإنه ليس ضروريًّا أن يكون للأجسام المتنافسة نفس الكتلة أو نصف القطر. وحتى بدون حل تفصيلي للمسألة، يستطيع المرء أن يتوقع ببساطة من تحليل الأبعاد أن تسارع كلٍّ من

هذه الأجسام لن يعتمد على كتلتها أو نصف قطرها. يجب أن نحسب التسارع وكميات المدخلات الوحيدة ذات الأبعاد هي g وM وR وليس هناك مفرٌّ من استخدام M أو R في الإجابة للحصول على كمية لها وحدات تسارع.

نلاحظ أيضًا أن هناك طريقة «بسيطة» على نحو خادع لحساب a، وتحديدًا بكتابة معادلة العزم حول نقطة التماس اللحظية. دعنا نضع علامة ملونة (أصل قصوري) على المستوى المائل. في لحظة تلامس الجسم المتدحرج للعلامة تكون كمية التحرك الزاوية حول العلامة هي $I\omega$؛ حيث $I = I_{CM} + MR^2$ (نظرية المحور الموازي)، ويكون العزم الخارجي حول العلامة هو $MgR \sin\beta$. إذا ساوينا المشتقة الزمنية لكمية التحرك الزاوية $I\omega$ بالعزم نحصل على القيمتين الصحيحتين لكلٍّ من α وa. وتكمن الصعوبة في أن كمية التحرك الزاوية L حول العلامة تساوي $I\omega$ فقط عند لحظة ملامسة الجسم للعلامة، وهناك حدٌّ إضافي لـ L عند اللحظات القريبة (لأن العلامة ليست نقطة مثبتة في الجسم). للتحقق من صحة هذا «الحل» ينبغي توضيح أن المشتقة الزمنية لهذا الحد الإضافي تتلاشى عند اللحظة قيد الاعتبار.

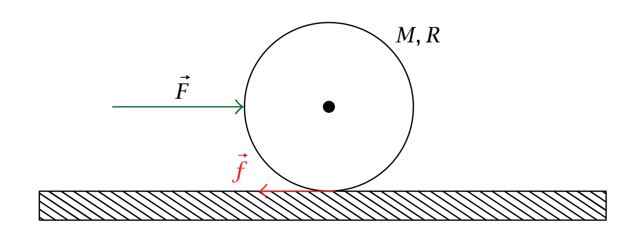
وكسؤال إضافي، على سبيل التحدي، يستطيع القارئ أن يحدد درجة انحدار المستوى التي تسبب انزلاق الكرة. (افترض أنك تعرف قيمة μ_s).

مثال ٨-٨ (كرة بلياردو تنزلق عندما تتدحرج بدون انزلاق). تضرب عصا البلياردو الكرة المدفوعة أفقيًّا بطول خط متجه خلال مركز الكرة. مقدار سرعة مركز الكرة بعد دفعها مباشرة هو v_1. معامل الاحتكاك الحركي بين الكرة والمنضدة هو μ_k. احسب المسافة التي تقطعها الكرة قبل أن تتوقف عن الانزلاق، والزمن الذي ينقضي قبل توقفها عن الانزلاق.

الحل. ينبغي أن يفهم المرء أولًا كيفية ما يحدث. نفترض أن عصا البلياردو تبذل قوة دفعية على الكرة؛ أي إن العصا تبذل قوة كبيرة F لفترة زمنية قصيرة جدًّا t_1 بحيث يكون الدفع:

$$\mathfrak{I} = \int F dt \qquad (8\text{–}49)$$

له قيمة محدودة (هي كمية التحرك التي تعطيها العصا للكرة). معادلة العزم للكرة (حول مركز الكتلة) هي $fR = I_{cm} d\omega/dt$. وبما أن قوة الاحتكاك f تتناسب



شكل ٨-٢٦: ضُربت كرة بلياردو بقوة دفعية كبيرة بما يكفي لأن تبدأ الكرة الدحرجة بانزلاق في المثال ٨-٨.

مع وزن الكرة، فإنها لن تصبح كبيرة أثناء الزمن الذي تضرب فيه العصا الكرة؛ لذا إذا كانت t_1 صغيرة بدرجة كافية، فإن مقدار السرعة الزاوية ω يساوي بالأساس صفرًا بعد أن تضرب العصا الكرة مباشرة. وبناءً على ذلك فإن سرعة الكرة في البداية تكون $\vec{v}_1$ في اتجاه اليمين، والسرعة الزاوية تساوي صفرًا. القاعدة تنزلق والقوة الاحتكاكية $\mu_k Mg$ تسبب تسارعًا زاويًّا مع عقارب الساعة $\alpha = fR/I_{\text{CM}} = (5/2)\mu_k g/R$. القوة الاحتكاكية تتجه إلى اليسار وتسبب تسارعًا خطيًّا $-\mu_k g$ لمركز الكتلة.

كلما تناقص مقدار سرعة المركز ازدادت السرعة الزاوية مع عقارب الساعة، وتناقصت سرعة الجزيء السفلي (نحو اليمين) بالنسبة إلى المنضدة، ويستمر هذا إلى اللحظة التي تكون عندها سرعة الجزيء السفلي تساوي صفرًا. عند هذه اللحظة تبدأ الدحرجة بدون انزلاق (تتعشق الخشونة الدقيقة للكرة مع خشونة المنضدة، مثل تعشيق التروس)؛ وبالتالي تظل السرعة والسرعة الزاوية ثابتتين.

خلال طور الانزلاق تكون a ثابتة ويكون مقدار سرعة المركز عند زمن t هو $v = v_1 - \mu_k gt$. وبما أن السرعة الزاوية الابتدائية تساوي صفرًا فإنه يكون لدينا $\omega = \alpha t = 5/2(\mu_k gt/R)$ (لاحظ أننا لا نستطيع كتابة $\alpha = a/R$ لأن هذا جاء بأخذ التفاضل $d/dt(v = \omega R)$، ولكن $v = \omega R$ تظل صحيحة فقط عندما يكون للجزيء السفلي سرعة صفرية؛ أي لا يوجد انزلاق). مقدار سرعة الجزيء السفلي هو $v_{\text{bot}} = v - \omega R = v_1 - (7/2)\mu_k gt$. يحسب الزمن T عند توقف الانزلاق بوضع $v_{\text{bot}} = 0$؛ أي إن $T = (2/7)(v_1/\mu_k g)$. المسافة التي تقطعها الكرة أثناء الانزلاق هي $D = v_1 T - (1/2)\mu_k gT^2 = (12/49)v_1^2/u_k g$. وسرعة المركز عند زمن T هي

$v(T) = v_1 - \mu_k gT = 5/7v_1$. لاحظ أن سرعة الكرة عندما تتوقف عن الانزلاق لا تعتمد على μ_k أو g!

إذا نمذجنا التلامس بين الكرة والأرضية على أنه يحدث عند نقطة واحدة فقط، فإن الكرة التي تتدحرج بدون انزلاق على أرضية أفقية لن تتوقف أبدًا عن الدحرجة. البرهان، بالكلمات، هو: إذا كانت القوة الاحتكاكية $\vec{f}$ تعمل بالتوازي العكسي لسرعة المركز، فإن السرعة سوف تنقص، ولكن العزم الناتج بالقوة $\vec{f}$ سوف يزيد السرعة الزاوية (وإذا لم يكن هناك انزلاق، فإن السرعة الخطية يجب أن تزداد)؛ ويحدث تناقص مماثل إذا كانت $\vec{f}$ موازية للسرعة؛ لذا فإن $f = 0$ و$a = 0$. يمكنك كتابة المعادلات بسهولة. ولفهم كيفية توقف الكرة، يجب أن نسمح للسطح بأن يبذل قوة على الكرة عند أكثر من نقطة، مثلًا، بجعل الكرة زَغِبة أو لينة، أو بغمسها في سطح رملي أو دهني.

(٥) الشغل والطاقة لديناميكا الجسم الجاسئ

نظرية الشغل والطاقة التي أثبتناها لكتلة نقطية يمكن تعميمها لأنظمة من الجسيمات. ولفهم ما تقوله النظرية بشأن الأجسام الجاسئة، دعنا أولًا نفحص حالة بسيطة (شكل ٨-٢٧): جسم جاسئ ذو بُعدين يمكنه أن يدور حول محور مثبت خلال نقطة O، ويتعرض لقوة $\vec{F}$ تعمل عند نقطة P على الجسم. الشغل الذي تبذله القوة عند دوران الجسم زاوية صغيرة $\Delta\theta$ هو $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$؛ حيث $\Delta\vec{r}$ متجه إزاحة P. وحيث إن P تتحرك في دائرة حول O، فإن مقدار $\Delta\vec{r}$ هو $r\Delta\theta$ (حيث r المسافة من O إلى P) واتجاهها عمودي على OP (مع اتجاه عقارب الساعة إذا كان $\Delta\theta > 0$). وبناءً على ذلك يكون الشغل الذي تبذله $\vec{F}$ هو $\Delta W = Fr\Delta\theta \sin\beta = \tau\Delta\theta$؛ حيث β الزاوية بين $\vec{F}$ وOP، و$Fr\sin\beta$ هو العزم المؤثر على الجسم، ويكون «معدل الشغل» هو:

$$\frac{dW}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \tau \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \tau\omega. \qquad (8\text{–}50)$$

مقدار سرعة جسيم كتلته m_i (شكل ٨-٢٨) ويبعد عن O مسافة r_i هو ωr_i. وعليه تكون طاقة حركة الجسم هي (KE): $(1/2)\sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = (1/2)I\omega^2$. (هذا صحيح أيضًا في أبعاد ثلاثة، بإحلال البُعد العمودي للكتلة m_i محل محور الدوران r_i. وتتسع المعادلة (8–51) بالفعل لتشمل الحالة عندما لا يكون المحور ثابتًا، بحيث تتضمن طاقة

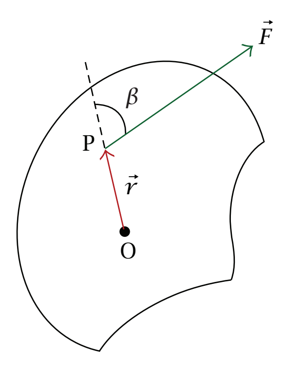
الحركة الكلية إسهامات من حركتي الإزاحة والدوران.) وإذا اعتبرنا معادلة العزم $\tau = Id\omega/dt$ وضربنا كلا الجانبين في ω، نحصل على:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\,(\mathrm{KE})\,. \tag{8-51}$$

بتكامل كلا طرفي المعادلة (8–51) بالنسبة إلى t من زمن اختياري t_0 إلى زمن اختياري آخر t_f نحصل على:

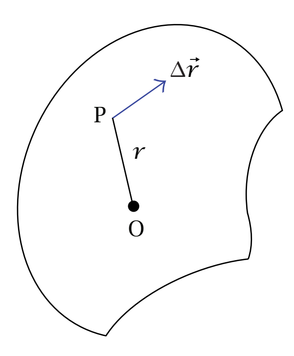
$$W = (\mathrm{KE})_f - (\mathrm{KE})_0 = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2, \tag{8-52}$$

حيث W الشغل المبذول على الجسيم بين t_0 و t_f ومحور الدوران مثبَّت.



شكل ٨-٢٧: قوة $\vec{F}$ مبذولة على جسم جاسئ ثنائي البعد يمكنه الدوران حول محور يمر بالنقطة O ومتعامد على الصفحة.

يجب أن نلاحظ أن القارئ الناقد يمكنه القول بأن الاستنتاج السابق، والتعميمات من ذلك غير ضرورية: لقد أثبتنا أنه لأي جسم في نظام ما يكون الشغل المبذول على الجسيم مساويًا للتغير في طاقة الحركة، ومن ثم فإن الشغل الكلي يجب أن يساوي التغير في طاقة الحركة الكلية. هذا التبرير صحيح ولكنه يشتمل على فرض خفي يقضي بأن القوى الداخلية ليس لها أي إسهام في الشغل الكلي. في الملحق (ب) نثبت أن هذا الافتراض صحيح إذا كان النظام جسمًا جاسئًا.



شكل ٨-٢٨: إذا دار الجسم عبر زاوية $\Delta\theta$، فإن النقطة P تتحرك عبر مسافة $r\Delta\theta$ متعامدة على OP.

تمكننا نظرية الشغل والطاقة من حساب تسارع القالب في المثال ٨-٣ بدون حساب الشد في الوتر. ليكن t_f في المعادلة (8–52) زمنًا اختياريًّا t، وليكن t_0 الزمن وقت تحرير القالب من السكون. لندع x تكون المسافة التي هبطها القالب من موضعه الابتدائي (x موجبة وتزداد كلما هبط القالب). بتطبيق المعادلة (8–52) على عجلة حدافة نحصل على:

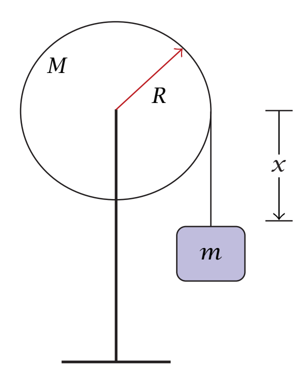
$$W' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2, \tag{8–53}$$

حيث W' الشغل المبذول بواسطة الوتر على عجلة الحدافة خلال الزمنين t_0 و t، و ω مقدار السرعة الزاوية عند زمن t. لاحظ أن $W' \neq mgx$؛ لأن الشد في الوتر لا يساوي mg. لسنا في حاجة لمعرفة قيمة W'. تؤدي نظرية الشغل والطاقة للقالب إلى:

$$W_{\text{grav}} + W'' = \frac{1}{2}mv^2, \tag{8–54}$$

حيث W_{grav} و W'' هما الشغل المبذول على القالب بواسطة الجاذبية والوتر (بين t_0 و t)، و v مقدار سرعة القالب عند زمن t.

من المهم معرفة أن $W'' = -W'$. لإدراك هذا نلاحظ أنه عندما يسقط القالب مسافة صغيرة Δx يبذل الوتر شغلًا $T\Delta x$ على العجلة وشغلًا $-T\Delta x$ على القالب. وبناءً عليه إذا جمعنا المعادلتين (8–53) و(8–54) فإن W و W'' يتلاشيان. لاحظ أن هذا التبرير يعتمد على عدم قابلية الوتر للمط أو الاستطالة؛ وإلا فإن القالب لن



شكل ٨-٢٩: عجلة حدافة كتلتها M، وثقلٌ كتلته m مع إزاحة مسافة x في الاتجاه الرأسي.

يتحرك نفس المسافة التي تتحركها النقطة التي عندها يلامس الوتر العجلة. بإدخال $W_{\text{grav}} = mgx$ و $\omega = v/r$ (التي تعتمد أيضًا على عدم قابلية الوتر للاستطالة)، نجد أن:

$$mgx = \left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}M\right)v^2 \longrightarrow v^2 = \frac{2gx}{1 + M/2m}. \qquad (8\text{–}55)$$

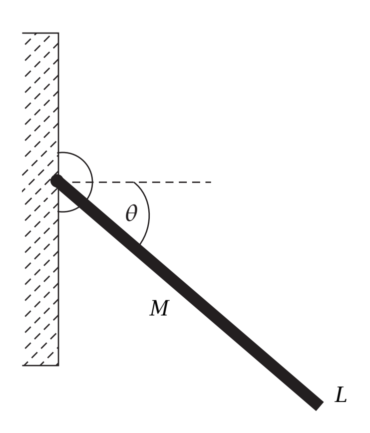
من المعادلات الكينماتيكية في الفصل الأول، نعلم أنه عندما توجد علاقة خطية بين v^2 وx، فإن العجلة تكون ثابتة وتساوي نصف معامل التناسب. إذا أراد الطالب أن يفهم برهان هذه المقولة فعليه أن يفاضل كلا طرفي المعادلة (8–55) بالنسبة للزمن t. وبما أن $d(v^2)/dt = 2v\,dv/dt = 2va$ و $dx/dt = v$، نحصل على:

$$a = \frac{g}{1 + M/2m}, \qquad (8\text{–}56)$$

وهو ما يوافق حلَّنا لمثال ٨-٣.

مغزى المعادلة (8–55) يجب أن يكون واضحًا من الآن. إذا اعتبرنا النظام (بكرة + قالب + وتر) فإن طاقة الحركة تكون $(1/2m + 1/4M)v^2$ وطاقة الجهد تكون $-mgx$ [طاقة جهد الجاذبية لعجلة البكرة تظل ثابتة ويمكن اعتبارها صفرًا]، والمعادلة (8–55) تنص ببساطة على أن الطاقة الكلية (طاقة الجهد + طاقة الحركة) عند زمن t تساوي الطاقة الكلية (صفرًا) عند زمن t_0.

نظرية الشغل والطاقة تمكِّننا من حساب مقدار السرعة الزاوية للقضيب الذي اعتبرناه في مثال ٨-٤ (انظر شكل ٨-٣٠) بعد سقوطه خلال زاوية θ.



شكل ٨-٣٠: قضيب كتلته M وطوله L يسقط خلال إزاحة زاوية θ أثناء اتصاله بالحائط عن طريق مفصل أملس.

مثال ٨-٩ (قضيب متصل بحائط عن طريق مفصل، ويسقط خلال زاوية θ). القضيب في الشكل ٨-٣٠ متصل بالحائط عن طريق مفصل أملس، وحُرِّر من الوضع الأفقي في البداية بسرعة زاوية صفرية. احسب: (أ) السرعة الزاوية عندما يسقط خلال زاوية θ. (ب) القوتين الأفقية والرأسية اللتين يبذلهما المفصل عند تلك اللحظة.

الحل. من تعريف مركز الكتلة لنظام جسيمات، ينتج على الفور أن الشغل الذي تبذله الجاذبية عند حركة النظام من تشكيل ابتدائي (0) إلى تشكيل نهائي (f) يكون $Mg(z_0 - z_f)$؛ حيث M الكتلة الكلية للنظام وz_0 وz_f هما الارتفاعان الابتدائي والنهائي لمركز الكتلة فوق مستوى إسناد اختياري. وباستخدام المعادلة (8-52) يكون:

$$\left(Mg\frac{L}{2}\right)\sin\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2. \qquad (8\text{–}57)$$

وعلى وجه الخصوص، عندما تكون $\theta = \pi/2$ (قبل أن يصطدم القضيب بالحائط مباشرة) يكون لدينا $\omega^2 = 3g/L$. [تحذير: خطأ شائع أن تستعمل المعادلات التي تطبق فقط عندما تكون العجلة الزاوية صفرًا، وهي ليست حالتنا هنا.]

معادلة العزم عندما يصنع القضيب زاوية θ مع الأفقي هي:

$$\frac{1}{3}ML^2\alpha = \left(\frac{MgL}{2}\right)\cos\theta. \tag{8–58}$$

المعادلة (8–57) يمكن استنتاجها كنتيجة رياضياتية للمعادلة (8–58) حتى لو لم نذكر قطُّ الشغل أو طاقة الحركة. بملاحظة أن $\alpha = d^2\theta/dt^2$ وبضرب كلا طرفي المعادلة (8–58) في $d\theta/dt$ نحصل على:

$$\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = \left(\frac{MgL}{2}\right)\cos\theta\frac{d\theta}{dt}. \tag{8–59}$$

وبما أن $d/dt[(d\theta/dt)^2] = 2(d\theta/dt)(d^2\theta/dt^2)$ و$d/dt(\sin\theta) = \cos\theta d\theta/dt$، يمكننا إعادة كتابة المعادلة (8–59) على الصورة:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{6}ML^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{MgL}{2}\sin\theta\right] = 0. \tag{8–60}$$

وبهذا تكون الكمية داخل القوس المربع ثابتة، ولكن قيمة الثابت تساوي صفرًا؛ لأنه عند الزمن الصفري يتلاشى كلٌّ من θ و$d\theta/dt$. بملاحظة أن $d\theta/dt = \omega$، نحصل على المعادلة (8–57).

يمكننا حساب القوتين الأفقية والرأسية اللتين يبذلهما المفصل في اللحظة التي عندها يسقط القضيب زاوية θ باستخدام النظرية (المعادلة (4–20)) $\vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{A}_{\text{CM}}$. القوى الخارجية المؤثرة على القضيب هي الجاذبية، و$\vec{H}$، و$\vec{V}$، والقوتان الأفقية والرأسية اللتان يبذلهما المفصل. بهذا يكون $H = Md^2X/dt^2$ و$V - Mg = d^2Z/dt^2$؛ حيث $X\,(= L/2\cos\theta)$ و$Z(= -L/2\sin\theta)$ هما إحداثيًّا مركز كتلة القضيب. بالتفاضل

نجد أن $dX/dt = -L/2\sin\theta\, d\theta/dt$ و$d^2X/dt^2 = -L/2\sin\theta d^2\theta/dt^2 -$ $L/2\cos\theta(d\theta/dt)^2$. من المعادلة (8–57) والمعادلة (8–58) يكون لدينا:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\cos\theta, \quad (8\text{–}61)$$
$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{3g}{L}\sin\theta.$$

وهكذا نجد أن $H = -9/4Mg\sin\theta\cos\theta = -9/8Mg\sin 2\theta$. لاحظ أن القوة الأفقية تتجه دائمًا إلى اليسار. إجراء حسابات مماثلة (افعل ذلك!) يفضي إلى أن $V = Mg/4(1 + 9\sin^2\theta)$.

نظرية الشغل والطاقة (التغير في طاقة حركة نظام ما يساوي الشغل المبذول على النظام) صحيحة حتى عندما يكون بعض أو كل القوى المؤثرة على النظام غير محافظة. إذا كانت قوة ما محافظة، فإنه يمكننا تعريف طاقة جهد لكل تشكيل من النظام. طاقة الجهد هي كمية الشغل التي تبذلها القوة أثناء تحرك النظام من ذلك التشكيل إلى تشكيل عياري ما (تكون طاقة جهده صفرًا، حسب التعريف). وعلى ذلك، إذا أخذنا $\theta = 0$ (أي إن القضيب أفقي) كتشكيل عياري للقضيب في مثال ٨–٩، فإن طاقة الجهد عندما يكون القضيب عند زاوية θ تحت الأفقي هي $-MgL/2\sin\theta$. إذا كانت جميع القوى المؤثرة على نظام ما محافظة، فإن طاقة الحركة + طاقة الجهد تساوي ثابتًا، وتحدد قيمة الثابت من الشروط الابتدائية. وهكذا فإنه في المعادلة (8–57) يمكننا أن ننقل الحد الموجود على اليسار عبر علامة التساوي ونحصل على: طاقة الحركة + طاقة الجهد = صفر.

يمكن ببساطة حل مسائل عديدة في ديناميكا الجسم الجاسئ باستخدام اعتبارات الطاقة، دون إدخال قوى وعزوم. بالرجوع إلى مثال ٨–٧ نستطيع أخذ التشكيل العياري على أنه الترتيب الذي تكون فيه نقطة التماس بين الجسم المتدحرج والمستوى المائل عند أدنى نقطة على المستوى المائل (انظر شكل ٨-٢٤). عندئذ تكون طاقة جهد الجاذبية التثاقلية هي $Mgx\sin\beta$؛ حيث x هي المسافة بين أدنى نقطة على المستوى المائل ونقطة التماس. عند تطبيق نظرية الشغل والطاقة يكون من المهم التحقق من

أن الجاذبية هي القوة الوحيدة التي تبذل شغلًا على الجسم المتدحرج. ومع أن المستوى يبذل قوة على الجسم المتدحرج، فإن هذه القوة لا تبذل شغلًا. معدل الشغل الذي يبذله المستوى المائل على الجسم المتدحرج هو $\vec{F} \cdot \vec{v}$؛ حيث $\vec{F}$ هي القوة التي يبذلها المستوى المائل، و$\vec{v}$ هي سرعة المادة في عنصر من السطح صغير جدًّا (يكون من الناحية المثالية خطًّا أو نقطة) من الجسم المتدحرج الذي يمس المنحدر. وفي غياب الانزلاق يكون $\vec{v} = 0$، ومن ثم $\vec{F} \cdot \vec{v} = 0$.

طاقة حركة الجسم المتدحرج هي $(1/2)I_p\omega^2$؛ حيث I_p هو عزم القصور الذاتي حول محور خلال نقطة التماس وعمودي على الشاشة (أو الصفحة). وكما ناقشنا سابقًا، تؤدي نظرية المحور الموازي إلى أن $I_p = I_{\text{CM}} + MR^2$؛ حيث $I_{\text{CM}} = (2/5, 2/3, 1/2, 1)MR^2$، وتشير المعاملات العددية الأربعة على التوالى إلى كرة مصمتة، وكرة جوفاء، وأسطوانة مصمتة، وأسطوانة جوفاء. إذا كتبنا «طاقة الحركة + طاقة الجهد = ثابتًا» واستبدلنا السرعة V/R بـ ω. حيث V مقدار سرعة مركز الجسم المتدحرج، نحصل على:

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{I_{\text{CM}}}{MR^2}\right)MV^2 + Mgx\sin\beta = \text{const.} \tag{8–62}$$

بتفاضل المعادلة (8–62) بالنسبة للزمن t، وملاحظة أن $dx/dt = -V$ و$dV/dt = a$، نحصل على نفس قيمة التسارع التي حصلنا عليها سابقًا.

وقبل مناقشة المثال التالي، سوف نذكر نظريتين بسيطتين ومفيدتين كثيرًا، أثبتناهما في ملحق (ب). لكن أولًا لنحدد بعض التعريفات: ليكن S أي نظام (تجمع جسيمات، وليس بالضرورة جسمًا جاسئًا)، وليكن $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ محاور متعامدة بعضها على بعض ومتصلة بنقطة أصل اختيارية O، وليكن O′ هو مركز كتلة CM للنظام S، وليكن $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$ محاور متعامدة بعضها على بعض ومتصلة بنقطة أصل O′، وغير دوارة بالنسبة للمحاور $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. [عادة O والمحاور $\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ تكون إطارًا قصوريًّا، لكن هذا الافتراض ليس ضروريًّا]. المتجه من O إلى O′ هو $\vec{R}_{\text{CM}} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$ وسرعة مركز الكتلة في الإطار $\text{O}\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ هي:

$$\vec{V}_{\text{CM}} = \hat{i}\frac{dX}{dt} + \hat{j}\frac{dY}{dt} + \hat{k}\frac{dZ}{dt}. \tag{8–63}$$

موضع الجسيمات ومتجهات سرعتها (في الإطار $O\hat{i}\hat{j}\hat{k}$) معرَّفة بالمثل؛ أي إن $\vec{r}_n = \hat{i}x_n + \hat{j}y_n + \hat{k}z_n$ و $\vec{v}_n = \hat{i}dx_n/dt + \hat{j}dy_n/dt + \hat{k}dz_n/dt$ بنفس التعريفات كما في إطار CM ($O'\hat{i}'\,\hat{j}'\,\hat{k}'$). كمية التحرك الزاوية للنظام S في الإطار $O\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ تسمى $\vec{L}_O$، وكمية التحرك الزاوية لنفس النظام في الإطار $O'\hat{i}'\,\hat{j}'\,\hat{k}'$ تسمى $\vec{L}_{CM}$. بالمثل، طاقة حركة S في الإطار $O\hat{i}\hat{j}\hat{k}$ تسمى KE_O وطاقة الحركة في الإطار $O'\hat{i}'\,\hat{j}'\,\hat{k}'$ تسمى KE_{CM}. لتكن M تساوي الكتلة الكلية للجسيمات في النظام S.

$$\textbf{Theorem:}\quad \vec{L}_O = M\vec{R}_{CM} \times \vec{V}_{CM} + \vec{L}_{CM}; \qquad (8\text{–}64)$$

$$\textbf{Theorem:}\quad KE_O = \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + KE_{CM}. \qquad (8\text{–}65)$$

المثال التالي يتطلب استخدام النظريتين الواردتين أعلاه.

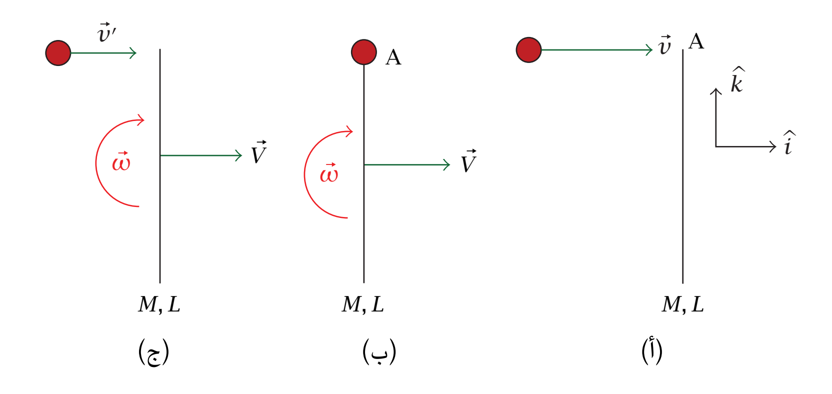
مثال ٨–١٠ (قضيب ضُرب بجسيم عند أحد طرفيه). قضيب (كتلته M وطوله L) منتظم الكثافة يستقر على منضدة ملساء (انظر شكل ٨-٣١). جسيم كتلته m ينزلق على المنضدة بسرعة $\vec{v}$ عموديًّا على القضيب ويصطدم به عند أحد طرفيه (A). بتعريف متجهات الوحدة $\hat{k}, \hat{i}$، $\hat{j} = \hat{k} \times \hat{i}$ كما في شكل ٨-٣١(أ)، نجعل $V\hat{i}$ و$v'\hat{i}$ و$\omega\hat{j}$ سرعة مركز القضيب، وسرعة الجسيم والسرعة الزاوية للقضيب بعد التصادم مباشرة.

(أ) (شكل ٨-٣١(ب)). احسب V وv' وω إذا اصطدم الجسيم مع القضيب عند A (أقصى تصادم غير مرن).

(ب) (شكل ٨-٣١(ج)). احسب V وv' وω إذا كان التصادم مرنًا (طاقة الحركة الكلية بعد التصادم = طاقة الحركة الكلية قبل التصادم).

الحل. نظرًا لغياب قوى خارجية مؤثرة على النظام (قضيب + جسيم)، فإن كمية التحرك الكلية وكمية التحرك الزاوية (حول نقطة أصل اختيارية) محفوظتان. يؤدي حفظ كمية التحرك إلى:

$$mv = mv' + MV. \qquad (8\text{–}66)$$



شكل ٨-٣١: قضيب كتلته M وطوله L ضربه جسيم كتلته m في مثال ٨-١٠.

أنسب نقطة أصل تحفظ حولها كمية التحرك الزاوية هي علامة (نسميها O) ملونة على المنضدة مباشرة تحت النقطة A. المحاور $\hat{i}\,\hat{j}\,\hat{k}$ متصلة بالمنضدة بالعلامة هذه كنقطة أصل. قبل التصادم، كمية التحرك الزاوية للنظام حول هذه العلامة تساوي صفرًا. وبعد التصادم مباشرة، كمية التحرك الزاوية للنظام للجسيم حول هذه العلامة تساوي صفرًا. باستخدام المعادلة (8-64) تكون كمية التحرك الزاوية للقضيب حول O بعد التصادم مباشرة هي:

$$\left(-\frac{L}{2}\hat{k}\right) \times \left(MV\hat{i}\right) + \left(\frac{1}{12}ML^2\right)\omega\hat{j}. \qquad (8\text{–}67)$$

ويكون:

$$0 = -\frac{MVL}{2} + \frac{1}{12}ML^2\omega. \qquad (8\text{–}68)$$

لدينا معادلتان في ثلاثة مجاهيل (v', V, ω). في الجزء (أ) المعادلة الإضافية علاقة كينماتيكية:

$$v' = V + \frac{1}{2}\omega L. \qquad (8\text{–}69)$$

في الجزء (ب) المعادلة الإضافية هي نَص حفظ الطاقة، وبالمعادلة (8-65) يكون:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{24}ML^2\omega^2. \tag{8-70}$$

من المعادلة (8-68) نجد أن $V = \omega L/6$. باستخدام المعادلة (8-69) نحصل على $v' = 4V$، وباستخدام المعادلة (8-66) للجزء (أ) ينتج أن:

$$\begin{aligned} V &= \frac{v}{4 + M/m}, \\ v' &= \frac{v}{1 + M/4m}, \\ \omega &= \frac{(6v/L)}{4 + M/m}. \end{aligned} \tag{8-71}$$

من المعادلة (8-66) لدينا $m(v - v') = MV$، والمعادلة (8-68) تعطي $\omega = 6V/L$. في المعادلة (8-70) نعيد كتابة $v^2 - v'^2$ على الصورة $(v - v')(v + v')$. وبهذا نجد في الجزء (ب) أن $MV(v + v') = 4MV^2$. أحد الحلول هو $V = 0$، ويعني ضمنًا أن $v = v'$ و$\omega = 0$. هذا هو حل «عدم حدوث شيء» الذي واجهناه سابقًا عند مناقشة التشتت المرن لجسيمين في بُعد واحد، وهو ذو صلة فيزيائيًّا فقط عندما لا يوجد أي تآثر بين المقذوف والهدف. إذا كان $V \neq 0$ نستطيع القسمة على V لنحصل على $v + v' = 4V$. بجمع هذا مع $v - v' = (M/m)V$ نحصل للجزء (ب) في النهاية على:

$$\begin{aligned} V &= \frac{v}{2 + M/2m}, \\ v' &= \frac{v\,(1 - M/4m)}{1 + M/4m}, \\ \omega &= \frac{3v/L}{1 + M/4m}. \end{aligned} \tag{8-72}$$

لاحظ أنه عندما يكون $M \gg m$ نحصل على $v' = -v$، وعندما يكون $M \ll m$ نحصل على $v' = v$، كما هو متوقع.

(٦) مسائل الحركة الدورانية

المسألة ٨-١. لُف خيطٌ عددًا من اللفات حول أسطوانة مصمتة، ووُصِّلَ أحد طرفي الخيط بالأسطوانة، بينما أمسكت طفلة بالطرف الآخر في يدها:

(أ) سقطت الأسطوانة رأسيًّا ولفَّت لحظيًّا مع فكِّ الخيط. احسب عجلة مركز الأسطوانة.

(ب) (الأستاذ جيه كيكاوا) إذا حركت الطفلة يدها بتسارع إلى أعلى بالعجلة المناسبة، فإن مركز الأسطوانة سوف يظل مثبتًا في مكانه. احسب العجلة المناسبة.

المسألة ٨-٢. عجلتا دراجة نصف قطر كلٍّ منهما R، وكتلة كلٍّ منهما m، ويمكن افتراض أنها مركزة كلِّية عند الحافة. كتلة الإطار بالإضافة إلى كتلة راكب الدراجة هي M. باستعمال دوَّاسة البدَّال طبَّق راكب الدراجة (عن طريق السلسلة) عزمًا τ على العجلة الخلفية. تتدحرج الإطارات على الطريق بدون انزلاق. احسب تسارع الدراجة a.

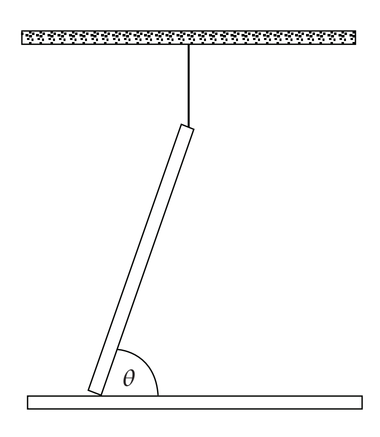
المسألة ٨-٣. الطرف العلوي لقضيب منتظم كتلته m متصل بالسقف عن طريق وتر رأسي، والطرف الأسفل يستقر على أرضية ملساء بزاوية θ مع الأرضية.

(أ) احسب القوة التي تبذلها الأرضية على القضيب.

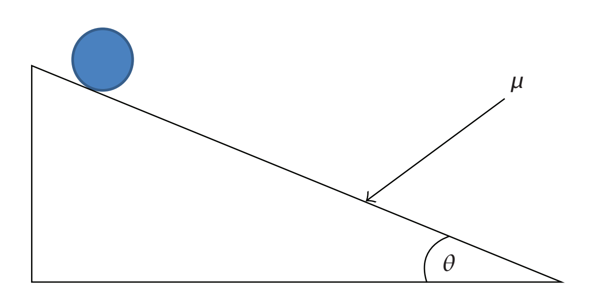
(ب) قُطع الوتر فجأة. احسب القوة التي تبذلها الأرضية والتسارع الرأسي لنقطة منتصف القضيب بعد قطع القضيب مباشرة.

المسألة ٨-٤. معامل الاحتكاك الاستاتيكي بين أسطوانة مصمتة وسطح تل هو μ. إذا لم يكن التل شديد الانحدار، فإنه يمكن للأسطوانة أن تتدحرج إلى أسفل التل بدون انزلاق. احسب أقصى زاوية انحدار لميل التل بحيث لا تنزلق الأسطوانة.

المسألة ٨-٥. سيارة نصف قطر عجلاتها R ونصف قطر غطاء محور عجلاتها r. سقط الغطاء أثناء حركتها على طريق أفقي بسرعة مقدارها v. ارتطم الغطاء بالطريق، و(بعد فترة زمنية عابرة قصيرة جدًّا) تدحرج موازيًا للسيارة بدون انزلاق. احسب مقدار سرعة الغطاء (تعامل مع الغطاء باعتباره قرصًا مصمتًا).



شكل ٨-٣٢: المسألة ٨-٣.

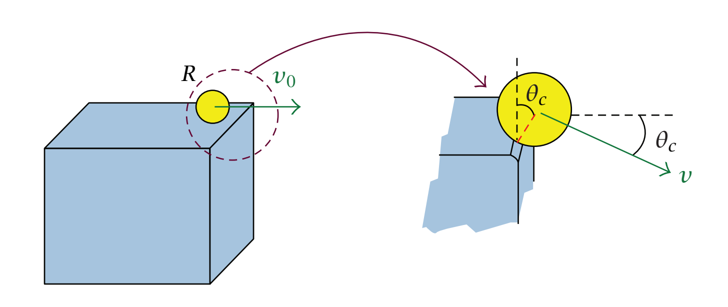


شكل ٨-٣٣: المسألة ٨-٤.

المسألة ٨-٦. السطح العلوي لمكعب أفقي، والمستويات المجاورة رأسية. تدحرجت على السطح العلوي كرة مصمتة نصف قطرها R، واقتربت من الحافة بسرعة $\vec{v}_0$ عمودية على الحافة. [تخيل أن الحافة أُديرت بنصف قطر انحناء صغير جدًّا ومعامل احتكاك استاتيكي كبير جدًّا]. إذا كانت v_0 أكبر من قيمة حرجة معينة v_c، فإن الكرة سوف تترك المكعب فورًا عندما تصل إلى الحافة؛ أي إن سرعة مركز الكرة ستكون أفقية بمجرد أن تفقد التماس مع المكعب. إذا كان $v_0 < v_c$ فإن الكرة تُبقي التماس (بدون

انزلاق) مع الحافة إلى أن يُدار الخط بين الحافة ومركز الكرة بعيدًا عن الرأسي بمقدار (زاوية) θ_c. في اللحظة التي تفقد فيها الكرة التماس مع المكعب سوف تتجه سرعة مركز الكرة بزاوية θ_c تحت الأفقي.

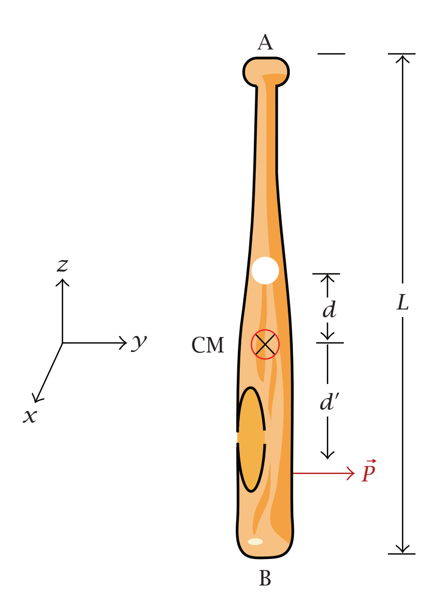
(أ) احسب v_c.
(ب) إذا كان $v_0 < v_c$ فاحسب θ_c.
(جـ) إذا كان $v_0 = 0$ (نعني في الحقيقة أن v_0 لا متناهية في الصغر)، أوجد قيمة θ_c عدديًّا.
(د) أَثبِتْ أنه إذا كان $v_0 = 0$ فإن الكرة (التي هي في حالة سقوط حر بمجرد أن تفقد التلامس مع الحافة) لن ترتطم في الحافة أثناء سقوطها [هذا سؤال صعب].



شكل ٨-٣٤: المسألة ٨-٦.

المسألة ٨-٧ (نظرية «الموضع السحري»). اعتبر قضيبًا منتظمًا طوله L (طرفاه A وB)، وَقَع عليه دفْع عموديًّا P عند نقطة p تبعد عن A مسافة $(L/2) + s$.

(أ) احسب السرعة، بعد الدفع مباشرة، التي تكتسبها نقطة p' على القضيب عندما تبعد عن A مسافة $(L/2) - y$. [ملحوظة: $0 < s,\ y < L/2$]
(ب) لكل قيمة من قيم y توجد قيمة «سحرية» لـ s تكون سرعة النقطة p' عندها تساوي صفرًا. إذا قبضت بيدك على القضيب عند النقطة p' وأعطيت دفْعة عند القيمة السحرية لـ s، فإن يدك لن تشعر بأي صدمة. باعتبار قيمة y كما هي معلومة،



شكل ٨-٣٥: المسألة ٨-٧.

احسب قيمة s السحرية. وإذا كانت $y = 0.400L$، فما هي قيمة s السحرية؟ (تعميم بسيط لهذا الحساب، باعتبار عدم انتظام توزيع الكتلة، سوف يحدد موضع النقطة السحرية على مضرب تنس أو كرة بيسبول.)

(ج) (طريقة أخرى، مكافئة، لتحديد موضع النقطة السحرية). اعتبر مضرب بيسبول ليس له توزيع كتلة منتظم، وعزم قصوره الذاتي حول مركز الكتلة هو Ma^2 (M = كتلة المضرب). وُضع المضرب بطول المحور z، ثُقب ثُقْبٌ موازٍ للمحور x خلال مقبض المضرب على بعد d من CM ووضع المضرب على محور يمر خلال الثقب (المحور مثبت في المكان، ولكن المضرب يمكنه أن يدور حول المحور). أعطيت دفعة $\vec{P}$ في الاتجاه y للمضرب على بعد d' من مركز الكتلة CM (على الجزء المسطح من المضرب؛ أي إن الدفع والمحور على جانبين متقابلين لمركز الكتلة). احسب الدفع الذي وصل إلى المحور، وبيِّن أن هذا الدفع سيكون صفرًا إذا كان $d \cdot d' = a^2$.

المسألة ٨–٨. قضيب (كتلته M موزعة بانتظام، وطوله L) معلق من السقف، ومتصل بمفصل جامع أملس. كتلة m من الصلصال تقترب من القضيب بسرعة $\vec{v}$ عمودية على القضيب وتلتصق به عند نقطة المنتصف.

(أ) احسب $\theta_{\max}$، أكبر زاوية بين القضيب والعمود في الحركة التالية.

(ب) احسب الدفع المعطَى للمفصل بواسطة القضيب. قدِّم تبريرًا واضحًا لأي نظرية (أو نظريات) حفظ تستخدمها.

الفصل التاسع

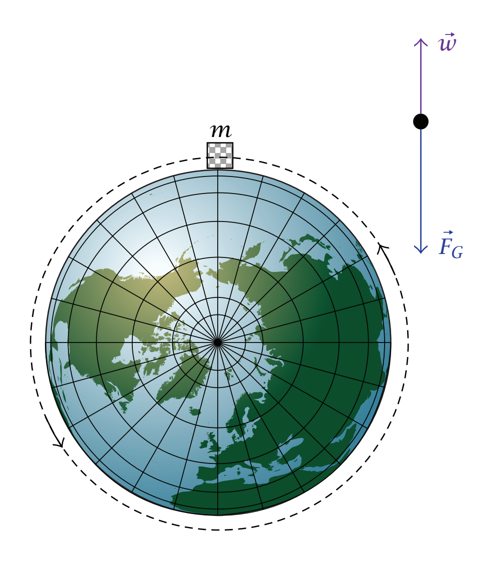
ملحوظات على قانون الجاذبية العام لنيوتن (مساهمة من لاري جلادني)

أدرك الإنسان لعدة قرون أن هناك نماذج متكررة يمكن التنبؤ بها في حركة الكواكب في سماء الليل، وفي منازل القمر وأطواره، وفي ظواهر المد والجزر في المحيطات. ولم يُكتشف قبل نيوتن قانونٌ فيزيائيٌّ عام يفسِّر كل هذه النماذج ويجعل من الكون مملكة للمعرفة البشرية، بالإضافة إلى منجزات في الرياضيات قدَّمها نيوتن أيضًا. لقد بلغ قانون الجذب العام هذا درجة من الكمال تجعله حتى اليوم أساسًا لفهم أفلاك المئات من الأقمار الاصطناعية التي تدور حول الأرض، ولهندسة البعثات التي تهبط على المريخ. وبعد نيوتن بقرنين أحدث أينشتاين مرة أخرى ثورة في فهمنا للجاذبية.

نستطيع هنا فقط أن نُشير إلى بعض النتائج المترتبة على قانون الجذب العام لنيوتن. هذا القانون، مع قوانين نيوتن الثلاثية للحركة، يعتبر الأساسي لتطبيقات لا تُحصى ولا تعد في الفلك والجيولوجيا والفيزياء. هذه التداخلات مع مجالات أخرى، على نحو رائع ولافت للنظر، تعتبر جميعها سهلة المنال لطلاب الفيزياء المبتدئين. وتكمن عبقرية نيوتن في أن قانونه للجاذبية الكونية لا يزال لأفضليته باقيًا بعد مرور أكثر من ثلاثة قرون من البحث والتفكير في الموضوع. ورغم أن نظرية النسبية العامة لأينشتاين تقدم فكرة أصيلة تمامًا عن كيفية عمل الجاذبية، فإنها لم تُزِح قوانين نيوتن عن أيٍّ من تطبيقاتها على مستويات الحجم من مختبر مقيد بالأرض إلى تأثيرات تحدث في المجرات. هذه أيضًا نتيجة أخرى لبساطة وعمق القوانين الأساسية للطبيعة.

(١) تعيين g

ذكرنا في القسم [حركة الكواكب والأقمار الصناعية؛ قانون نيوتن للجاذبية التثاقلية] أن الاستخدام المباشر لقانون الجذب العام لنيوتن لم يتحقق بصورة حاسمة؛ لأننا كنا ننظر نموذجيًّا إلى تطبيق القانون في أطُر غير قصورية. هذا ينطبق على تعيين g، العجلة المحلية بالقرب من سطح الأرض أثناء دورانها حول محورها؛ ولذا فإن السطح ليس إطارًا قصوريًّا بصورة صارمة، بل إننا نتجاهل هذا نموذجيًّا في الفيزياء التمهيدية. دعنا نُقيِّم ما إذا كان هذا مبَّررًا.



شكل ٩-١: مسقط عمودي لصورة الكرة الأرضية كما يُرى من فوق القطب الشمالي مباشرة. الكتلة m تدور مع سطح الأرض. نرغب في تحديد تأثير دوران الأرض على الوزن $\vec{w}$.

مثال ٩-١ (تأثير دوران الأرض على g). الشكل ٩-١ منظر تخطيطي لكتلة m مستقرة على سطح الكرة الأرضية كما تُرى من فوق القطب الشمالي. حجم m مبالغ فيه بدرجة كبيرة. نرغب في معرفة الوزن w الذي يمكن قياسه، بميزان زنبركي مثلًا، إذا عُلم أن مقدار قوة الجاذبية هو $F_G = GmM_E/R_E^2$.

الحل. نلاحظ أولًا أن الجسم ليس في حالة اتزان مع القوى المبينة وحدها؛ لأن سطح الأرض ليس إطارًا قصوريًّا. فالجسم m له صافي عجلة a_R نحو مركز الأرض، ومن ثم فإن ما نقيسه كوزن أقل من F_G؛ لأن

$$F_G - w = ma_R. \qquad (9\text{-}1)$$

بإدخال F_G في معادلة نيوتن واستخدام التعريف العادي للوزن بأنه $w = mg$، نحصل بخطوة جبرية واحدة على

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2} - a_R. \qquad (9\text{-}2)$$

وبهذا فإنه عند القطبين فقط يكون $g = GM_E/R_E^2$. وفي الواقع، اتجاه $\vec{a_R}$ لا يكون نحو مركز الأرض ما لم تكن عند خط الاستواء، فاتجاهه الفعلي عند مواقع أخرى يكون عموديًّا على محور دوران الأرض عند خط عرضك المعطى. ويحدث أكبر تأثير ممكن لدوران الأرض عند خط الاستواء؛ حيث، بتجاهل الانبعاج البسيط للأرض، يكون لدينا:

$$a_R = \omega^2 R_E = \frac{4\pi^2 R_E}{T^2}, \qquad (9\text{-}3)$$

حيث T الزمن الدوري للدوران — يوم واحد أو $8.64 \times 10^4\,\mathrm{s}$. وبمعلومية $R_E = 6.37 \times 10^6\,\mathrm{m}$ يكون لدينا $a_R = 0.0337$، أو حوالي ثلث في المائة من قيمة g النموذجية وهي $9.8\,\mathrm{m/s^2}$. وهكذا يكون الفرق بين القيمة النموذجية للكمية g عند خط الاستواء وعند القطب الجنوبي غير قابل للإهمال، ولكنه صغير بدرجة تكفي لأن نبرر إغفاله عادة لخطوط العرض الواقعة في الوسط.

مثال ٩-٢ (تأثير الارتفاع على g). نأخذ أيضًا عجلة الجاذبية الأرضية g على أنها ثابتة. ويتضح من قانون الجاذبية أن هذا ليس صحيحًا؛ لأن ارتفاع مكان معين على سطح الأرض يمكن أن يضعه عند مسافة أبعد من مركز الأرض أو أقرب إليه. إلى أي مدى يمكن أن يصل تأثير هذا الارتفاع بالنسبة لحالات «نموذجية» مُحتملة مواجهتها؟

الحل. نريد أن نرى كيف تتغير g كدالة للارتفاع أو التغير في البعد عن مركز الأرض. من المقبول عادة في مثل هذه المسائل أن يُحسب التغير الكسري. وبالنسبة للحالة

المتصلة بالموضوع، الكتلة m على بعد r من مركز الأرض تتعرض لقوة الجاذبية F؛ حيث

$$F = \frac{GmM_E}{r^2} \Longrightarrow$$

$$dF = -2\frac{GmM_E}{r^3}dr \Longrightarrow \tag{9-4}$$

$$\frac{dF}{F} = -2\frac{dr}{r}.$$

تُبين النتيجة أن التغير الكسري في القوة يساوي تمامًا ضعف التغير الكسري السالب في نصف القطر؛ حيث نلاحظ أن الإشارة السالبة حاسمة؛ لأنها توضح أن مقدار القوة ينقص إذا كان التغير في المسافة موجبًا. دعنا نقيِّم التغير الكسري لشخص ما ارتفع في طائرة من مستوى الأرض وحلَّق على ارتفاع ١٠ كيلومترات (حوالي ٣٣ ألف قدم).

$$F = mg \Longrightarrow dF = mdg \Longrightarrow$$

$$\frac{dF}{F} = \frac{dg}{g} = -2\frac{dr}{r} = -2\frac{10^4\,\text{m}}{6.37 \times 10^6\,\text{m}}, \tag{9-5}$$

$$\frac{dg}{g} = -0.31\%.$$

لا تعجب من أنك لم تشعر قطُّ بخفة الوزن عند ركوب طائرة، فالتغير بمقدار ثلاثة أجزاء في الألف يمكن مقارنته بتأثير دوران الأرض، ولا يمكن لأحد أن يلاحظه، لكن الأجهزة يمكنها بسهولة أن تقيس كسورًا أصغر من هذا، ومن ثم تستخدم هذه الطريقة لعمل تقدير تقريبي لشكل الأرض، أو ما يسمى «الجيود»؛ أي «مجسَّم الأرض».

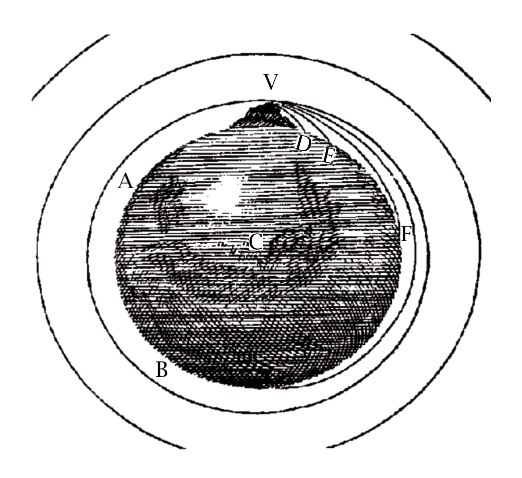
(٢) قانون كبلر الأول للحركة الكوكبية

يتحرك مذنَّب (مثل مذنب هالي) في مدار قطع ناقص ورفيع وطويل، وتقع الشمس في إحدى بؤرتيه. من مناقشتنا السابقة لمبدأ حفظ كمية التحرك الزاوية في قسم [كمية التحرك الزاوية والقوة المركزية] ينتج أن $v_{\tan}$ تكون القصوى عندما يكون المذنَّب أقرب ما يمكن إلى الشمس، وتكون أدنى عندما يكون المذنب أبعد ما يمكن. في القسم

[حركة الكواكب والأقمار الصناعية؛ قانون نيوتن للجاذبية التثاقلية] أحصينا قوانين كبلر للحركة الكوكبية، وأوضحنا كيف يمكن استنتاج القانونين الثاني والثالث من هذه القوانين باستخدام قانون الجذب العام لنيوتن. وحقيقة أن مدارات الكواكب أو مذنب هالي يجب أن تكون على شكل قطع ناقص لم تكن موضحة؛ لأنها تتطلب قدرًا أكبر قليلًا من الرياضيات. لكنه، بهدف الاستكمال، من المقبول عقلًا أن نأخذ ما سبق أن تعلمناه في الفصول السابقة لنوضح أن المدارات الإهليلجية هي التوقع المضبوط لقانون التربيع العكسي $1/r^2$ لقوة الجاذبية.

نلاحظ أولًا أن مسألة اعتبار مسار جسيم نقطي متحرك في مجال جاذبية جسم كتلته أكبر كثيرًا يمكن أخذها بسهولة في الاعتبار في الإحداثيات القطبية بدلًا من الإحداثيات الكارتيزية. المسوِّغ لأن يكون ذلك كذلك بسيط جدًّا ويعزى إلى نيوتن نفسه. فالخبرة، ورياضيات العجلة الثابتة تُعلمنا أن جميع مسارات الأجسام المتحركة بحُرِّيَّة قريبًا من سطح الأرض هي مسارات إهليلجية. وبمعلومية أن الأجسام الأبعد عن السطح تتعرض لجاذبية مختلفة، كيف يؤثر ذلك على المسار؟ بدأ نيوتن تفكيره في الموضوع بأن يفترض أولًا عجلة جاذبية ثابتة، وأجرى تجربة فكرية للسؤال التالي: ماذا يحدث إذا أطلقت مقذوفًا أفقيًّا من مدفع على قمة جبل عالٍ جدًّا؟ افترض أن الجبل بالغ العلوِّ لدرجة أن المقذوف يتحرك في الأغلب فوق الغلاف الجوي بحيث يمكننا إهمال مقاومة الهواء (من الواضح أن هذا كله افتراض خيالي! فلا يوجد مثل هذه الجبال على الأرض.) (انظر شكل ٩-٢). ما يزال المقذوف سيسقط في البداية عندما تحدده عجلة الجاذبية المحلية أيًّا كان، برغم أن حركته الأفقية لم تتغير. لهذا فإن المسار الإهليلجي لا يزال متوقعًا. لكن الآن، بمعلومية ارتفاع الجبل، يمكننا أن نتوقع امتداد مدى المقذوف إلى أبعد مما يحدث لمقذوف أُطلق من الأرض بنفس مقدار السرعة الابتدائية. وبمعلومية انحناء الأرض، يمكننا أن نتوقع أن المقذوف لا بد أن يسقط أبعد من مجرد الارتفاع الرأسي للجبل. دعنا نقُل إن عجلة الجاذبية المحلية لا تزال حوالي $10\,\mathrm{m/s^2}$. عندئذٍ نتوقع، في حالة مدفع قوي بدرجة كافية، أن يكون مقدار السرعة الابتدائية للمقذوف كبيرًا بما يكفي لأن يكون المدى بحيث «ينحني» سطح الأرض بعيدًا عن قاعدة الجبل حتى يقطع المقذوف مسارًا أفقيًا أبعد (طوال فترة السقوط أفقيًّا). هل هناك سرعة ابتدائية أفقية تجعل المقذوف لا يرتطم بالأرض أبدًا؟ يمكننا تقدير قيمة مقدار مثل هذه السرعة الأفقية مع ملاحظة أن الجسم يهبط حوالي خمسة أمتار في الثانية الأولى

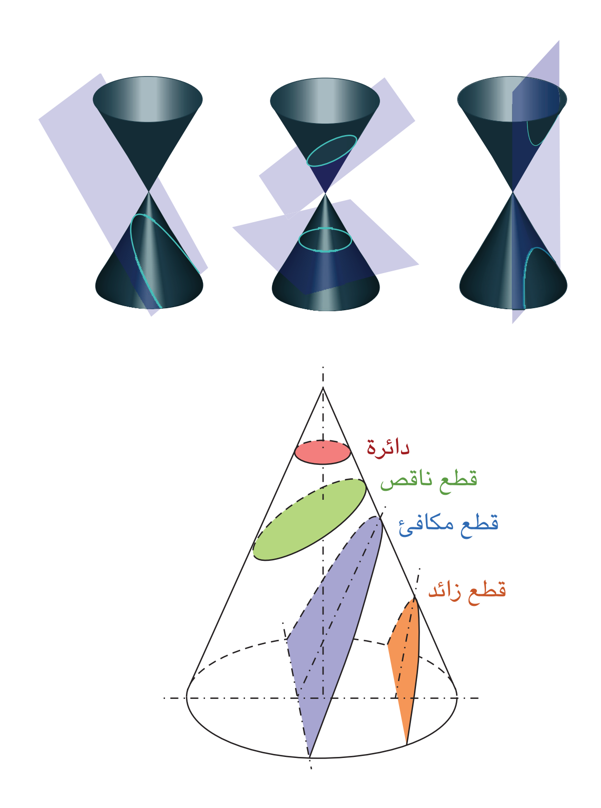
من الطيران. إذا كان مقدار السرعة الابتدائية بحيث تنحرف الأرض بعيدًا عن الخط الأفقي لقاعدة الجبل بمسافة رأسية خمسة أمتار، فإن المقذوف لن يكون أقرب إلى الأرض بعد ثانية واحدة مقارنة بلحظة إطلاقه؛ لأننا نعرِّف «الارتفاع» بأنه المسافة فوق سطح الأرض مباشرة أسفل المقذوف (أي بطول نصف قطر الأرض). «رأسيًّا إلى أسفل» تعني عموديًّا على سطح الأرض بطول نصف قطر الأرض ويكون «الأفقي» هو الاتجاه الموازي للسطح؛ أي عموديًّا على نصف القطر، وبهذا يواصل المقذوف حركته أفقيًّا أثناء «الهبوط» مع أنه لا يصير أقرب إلى سطح الأرض!



شكل ٩-٢: رسم توضيحي من نيوتن لتعليل توقعاتنا عن المسارات التي تحدث لمقذوفات سريعة بدرجة كافية بالقرب من جسم جاذبي.

وهكذا كما يوضح شكل ٩-٢ الطلقات المتتابعة بسرعات ابتدائية أسرع فأسرع تصل في النهاية إلى نقطة لا يهبط المقذوف عندها على الأرض أبدًا، وتظل تدور حول الأرض. السرعات الابتدائية الأبطأ تؤدي إلى مسارات بشكل القطع المكافئ، والسرعات المدارية تؤدي إلى مسار دائري. الدوائر والقطوع المكافئة تنتمي إلى قسم الأشكال الرياضياتي العام المسمى القطاعات المخروطية؛ لأنها يمكن الحصول عليها جميعًا بمستوى تقسيم شرائحي خلال مخروط بزوايا مختلفة (شكل ٩-٣). الدائرة التي

نراها في الشكل حالة خاصة من القطع الناقص. وهكذا، إذا كان المدار مغلقًا — أي إن المقذوف يكرر حركته حول الأرض — فإن الحل العام يكون قطعًا ناقصًا.



شكل ٩-٣: رسم توضيحي للقطاعات المخروطية.

بطبيعة الحال، عجلة الجاذبية التثاقلية ليست ثابتة، ولكنها تتغير كدالة في البعد عن مركز الجاذب؛ الأرض في هذه الحالة. إذن، كيف الحال مع المسألة العامة؟ كما هو مبين أعلاه، من الأسهل تصوُّر الحل بدلالة نصف القطر والموضع الزاوي. كما هو مبين في قسم [كمية التحرك الزاوية والقوة المركزية]، القوة المركزية تسبب دائمًا حركة ملازمة لمستوى، وبهذا نحتاج إلى متغيرين فقط وليس ثلاثة. فإذا جعلناهما r وθ بدلًا

من x وy مثلًا، فإن حل معادلة الحركة الناتج لحالة دائرة ينتهي إلى أن يكون عاديًّا؛ لأن r ثابتة. وحيث إن قوة الجاذبية تتجه فقط بطول r فإننا نعلم أن عجلة جسيم m حول كوكب كتلته M أكبر كثيرًا هي:

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2 = \frac{F_{\text{grav}}}{m} = -\frac{GM}{r^2}. \tag{9-6}$$

الجانب الأيمن للمعادلة ينتج من قانون الجاذبية لنيوتن، في حين أن الجانب الأيسر للمعادلة هو العجلة نصف القطرية $d^2r/dt^2 - \omega^2 r$ في الحالة العامة. لاحظ أن ω في المعادلة (9-6) دالة في الزمن أيضًا ويمكننا حذفها مع ملاحظة أن كمية التحرك الزاوية L ثابتة و$L = mr^2\omega$، ويكون:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} + r\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2 = -\frac{GM}{r^2} + \frac{L^2}{m^2r^3}. \tag{9-7}$$

حل هذه المعادلة صعب، لكننا نستطيع القيام به إذا استخدمنا تغير المتغيرات المتاحة لجميع معادلات القوة المركزية للحركة: $u \equiv 1/r$ ونستخدم ثبات كمية التحرك الزاوية للتحويل من زمن إلى موضع زاوي θ كمتغير مستقل. وباستخدام الأول يكون لدينا:

$$L = mr^2\omega = \frac{m}{u^2}\frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{Lu^2}{m} \tag{9-8}$$

واستخدام قاعدة السلسلة يعطي:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta} = \frac{Lu^2}{m}\frac{d}{d\theta}. \tag{9-9}$$

إذن نستطيع كتابة معادلة الحركة على الصورة:

$$\begin{gathered}\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{L}{m}\frac{du}{d\theta} \Longrightarrow \\ \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L^2u^2}{m^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}.\end{gathered} \tag{9-10}$$

وتصبح معادلة الحركة (9-7) على الصورة:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2}. \tag{9-11}$$

الطرف الأيمن ثابت، وبهذا يسهل التحقق من أن الحل هو:

$$u = \frac{1}{r} = \frac{GMm^2}{L^2} + C\cos\theta, \tag{9-12}$$

حيث C ثابت التكامل المطلوب تعيينه من الشروط الابتدائية للمدار (لاحظ أن r تعود إلى نفس القيمة عندما تزداد θ بمقدار 2π. هذا لا يكون صحيحًا إذا ما كان الأس في معادلة القوة غير ٢، عدا في حالة $F = -kr$). ولإضفاء شعور أكثر ألفة للمنحدر رياضيًّا، نكتب هذه المعادلة على الصورة العامة:

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + \varepsilon\cos\theta, \tag{9-13}$$

حيث ε تشير إلى الاختلاف المركزي للمدار، و2α تُسمَّى الوتر البؤري العمودي للمدار. من السهل ربط شكل المعادلة (9-13) بشكل قطع ناقص نصف محوره الأكبر a واختلافه المركزي ε إذا وضعت نقطة أصل نظام الإحداثيات $(r = 0)$ عند إحدى بؤرتي القطع الناقص. مثل هذه المعادلة ستكون:

$$\frac{a\left(1-\varepsilon^2\right)}{r} = 1 + \varepsilon\cos\theta. \tag{9-14}$$

يمكنك بسهولة أن تثبت لنفسك أن المعادلتين (9-13) و(9-14) تمثلان قطعين ناقصين لقيم ثابتة لكلٍّ من α وε وa بتطبيق أي برنامج رسم حاسوبي. واضح أن قيم الثوابت يجب أن تكون متصلة بالخصائص الفيزيائية للمدار. وأحد الاختيارات الواضحة هو:

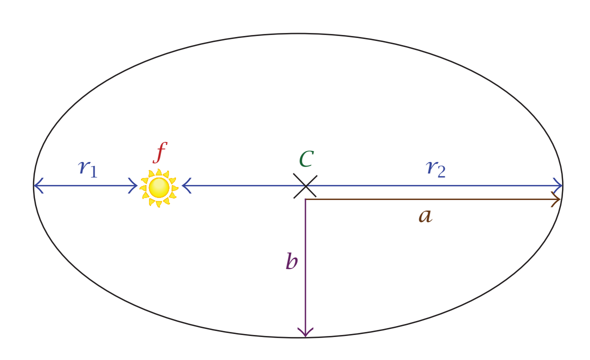
$$\alpha = \frac{L^2}{GMm^2} \Longrightarrow a = \frac{\alpha}{1-\varepsilon^2}. \tag{9-15}$$

نحتاج إلى عمل أكثر لبيان ذلك، لكن الاختلاف المركزي يمكن كتابته على الصورة:

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}} \tag{9-16}$$

حيث E الطاقة الميكانيكية الكلية للنظام.

مثال ٩-٣ (المدارات ومذنَّب هالي). عيَّن السير أدموند هالي مدار المذنب الشهير الذي يحمل اسمه. وحتى الآن لا يزال هو المذنب الوحيد قصير الزمن الدوري (تحديدًا،



شكل ٩-٤: بارامترات مدار قطع ناقص مع بارامترات مقيسة من نقطة الأصل عند مركز القطع الناقص C: نصف المحور الأكبر a، ونصف المحور الأصغر b، والشمس عند نقطة البؤرة f. يقاس أقل وأكبر مسافتين r_1 وr_2 على الترتيب من f.

يمكنك رؤيته أكثر من مرة في عمر الإنسان العادي) الذي تراه العين البشرية من الأرض بوضوح. الزمن الدوري للمدار حوالي ٧٦ سنة واختلافه المركزي ٠٫٩٦٧. أوجد أقصى وأقل مسافتين يبعدهما المذنب هالي عن الشمس.

الحل. يجب أن نلاحظ أولًا أن خصائص القطوع الناقصة تيسر إيجاد نصفَي القطرين الأكبر والأصغر (اللذين نرمز لهما بالرمزين r_1 وr_2 على التوالي) من البؤرة (موضع الشمس) بمجرد أن نعرف متوسط نصف القطر والاختلاف المركزي، يجب أن تتذكر من دروس الرياضيات أن:

$$\begin{aligned} r_1 &= a\,(1-\varepsilon)\,, \\ r_2 &= a\,(1+\varepsilon)\,, \end{aligned} \tag{9–17}$$

حيث a متوسط نصف القطر، أو نصف المحور الأكبر، وأن:

$$\begin{aligned} a &= \frac{r_1+r_2}{2}, \\ b &= \sqrt{r_1 r_2} \end{aligned} \tag{9–18}$$

حيث b نصف المحور الأصغر. لإيجاد متوسط نصف القطر في هذه الحالة نحتاج إلى تعميم برهان قانون الحركة الكوكبية الثالث لكبلر من قسم [حركة الكواكب والأقمار الصناعية؛ قانون نيوتن للجاذبية التثاقلية] لتناول المدارات الإهليلجية بدلًا من مجرد المدارات الدائرية. لعمل ذلك يصبح من المناسب استخدام برهان قانون كبلر الثاني من قسم [كمية التحرك الزاوية والقوة المركزية]، وتحديدًا أن المساحة الممسوحة لمدار واحد هي مساحة القطع الناقص، وهي ثابتة بسبب حفظ كمية التحرك الزاوية؛ أي إن المساحة A التي يمسحها خط من البؤرة إلى المذنب الذي يدور في المدار لكل وحدة زمن هي:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}, \tag{9-19}$$

حيث L كمية التحرك الزاوية للمدار. وتكون المساحة الممسوحة لزمن دوري T كامل واحد هي فقط:

$$T \frac{dA}{dt} = T \frac{L}{2m} = \pi ab \tag{9-20}$$

لأن πab هي مساحة القطع الناقص. نرى من المعادلة (9-12) أن طرفيْ r يحدثان عندما تكون $\theta = 0$ وπ، وبهذا يكون:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} = \frac{2GMm^2}{L^2} \tag{9-21}$$

ويمكن إعادة كتابتها على الصورة:

$$\frac{2a}{b^2} = \frac{1}{2} \frac{GM}{(dA/dt)^2} = \frac{1}{2} \frac{GM}{(\pi ab/T)^2} \tag{9-22}$$

وأخيرًا:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}. \tag{9-23}$$

هذا هو الشكل العام لقانون كبلر الثالث المناسب لأي مدار مغلق. وبالنسبة لدائرة يكون a مجرد نصف قطر ثابت. أخيرًا، بهذه النتيجة في أيدينا، نستطيع الإجابة على

السؤال الأصلي. لاحظ أن السنة فيها ٣٫١٥ × ١٠^٧ ثانية (وعلى سبيل الاختصار المفيد فعلًا تذكَّر أن هذا العدد هو $\pi \times 10^7$ s/y تقريبًا).

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Longrightarrow$$

$$a = \left[\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right]^{1/3}$$

$$= \left[\frac{(6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2})\,(1.99\times10^{30}\,\mathrm{kg})\,(76\,\mathrm{y}\cdot\pi\times10^7\,\mathrm{s/y})^2}{4\pi^2}\right]^{1/3}$$

$$a = 2.68\times10^{12}\,\mathrm{m} \Longrightarrow$$

$$r_{\min} = a\,(1-\varepsilon) = 2.68\times10^{12}\,\mathrm{m}\,(1-0.967) = 8.84\times10^{10}\,\mathrm{m}$$

$$r_{\max} = a\,(1+\varepsilon) = 2.68\times10^{12}\,\mathrm{m}\,(1+0.967) = 5.27\times10^{12}\,\mathrm{m}. \tag{9–24}$$

(٣) مسائل مدار الجاذبية

المسألة ٩-١. مركبة فضائية ثابتة في البداية (بالنسبة إلى الأرض) على ارتفاع ٣٠٠ كيلومتر فوق سطح الأرض. ما السرعة (في وضع التوازي مع سطح الأرض) التي يجب قذف المركبة بها لتدور في مدار دائري عند هذا الارتفاع؟ احسب أيضًا الفترة الزمنية للمدار.

المسألة ٩-٢. الطريقة الأكثر فعالية (من حيث الطاقة المبذولة) لإرسال مركبة فضائية من الأرض إلى كوكب آخر هي استخدام مدار هوهمان الانتقالي الذي فيه توضع المركبة الفضائية في مدار إهليجي الشكل، بحيث تكون أقرب نقطة في مدار المركبة الفضائية (تقريبًا) عند المدار الدائري للأرض حول الشمس، وأبعد نقطة (تقريبًا) عند المدار الدائري للكوكب الذي ستزوره/تغزوه. تجاهل جاذبية الأرض والمريخ، ويمكنك أن تجد القيم المتوسطة ذات الصلة للنظام الشمسي (كتلة المريخ والمسافة بينه وبين الشمس، وما إلى ذلك) في الكتب أو مصادر الإنترنت.

(١) حدد الاتجاه الذي تُطلق نحوه الصواريخ من أجل الانتقال من الأرض إلى المريخ ولرحلة العودة من المريخ إلى الأرض.

(٢) ما السرعة التي يجب إطلاق المركبة الفضائية بها من مدار أرضي منخفض وكم تستغرق الرحلة إلى المريخ؟

(٣) أين يجب أن يوجد المريخ (بالنسبة إلى الأرض) عند إطلاق المركبة الفضائية من الأرض؟

ملاحق

(١) ملحق (أ)

(١-١) المتجهات

هناك العديد من الكيانات التي يتعامل معها علم الفيزياء (بما فيها القوى، والسرعات، والتسارعات) يكون لدى كلٍّ منها مقدار واتجاه. هذه الكيانات تسمى المتجهات. على الصعيد المحلي، تُمَثَّل المتجهات بحروف ثقيلة أو (كما في هذا النص) بحروف عادية فوقها أسهم (على سبيل المثال، $\vec{v}$ = السرعة).

ينص قانون نيوتن الثاني (يُعَبَّر عنه بالمتجهات على الصورة $\vec{F} = m\vec{a}$) على أن مقدار عجلة جسيم كتلته m يتناسب (بمعامل تناسب $1/m$) مع مقدار القوة المؤثرة على الجسيم، ويكون اتجاه العجلة هو نفس اتجاه القوة. يوفر التعبير المتجهي طريقة موجزة لصياغة العلاقة بين العجلة والقوة. إذا أدخلنا مجموعة من المحاور اليمينية المتعامدة x، وy، وz، تكون المعادلة المتجهة $\vec{F} = m\vec{a}$ مكافئة لثلاث معادلات عددية $(F_x = ma_x, F_y = ma_y, F_z = ma_z)$؛ حيث F_x هي القوة في الاتجاه x، وa_x هي العجلة في الاتجاه x، وهكذا. إلى جانب المقدرة على توفير طريقة موجزة لكتابة العلاقة الرياضياتية بين العجلة والقوة، فإن التعبير المتجهي يوضح صراحة أن هذه العلاقة لا تعتمد على اصطفاف المحاور المستخدمة (أي الاتجاهات التي تشير إليها المحاور).

بصورة أعم، عندما نعبر عن معادلة ما باستخدام المتجهات، فإننا نوضح بطريقة موجزة العلاقة (أو العلاقات) بين مقادير واتجاهات الكيانات الفيزيائية الممثلة بالمتجهات. هذه العلاقة صحيحة، بغضِّ النظر عن اصطفاف المحاور المستخدمة، ويمكننا اختيار طريقة اصطفاف المحاور بحُريَّة وبأي طريقة نجدها ملائمة. أحيانًا

(مثلًا، كما في استنتاج نظرية الشغل والطاقة) يكون إدخال أية محاور أمرًا غير ضروري. إلى جانب ذلك، هناك العديد من العمليات الرياضياتية المختلفة التي تتعامل مع المتجهات (سوف نقدم فقط العمليات ذات الصلة بالميكانيكا الأولية) والتي توفر، في كثير من الحالات، رؤى ثاقبة وتقلل الجهد، مقارنة بما كنا سنفعله لو كنا اخترنا مجموعة معينة من المحاور وعالجنا مجموعة من المعادلات الآنية المشتملة على مركبات المتجهات (= الإسقاطات المتعامدة) في اتجاهات هذه المحاور.

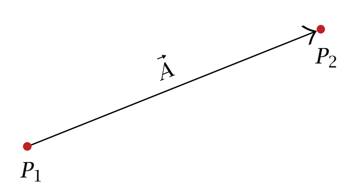
الملاحظات السابقة دعاية لفائدة الاعتياد على استخدام التعبير المتجهي والعمليات البسيطة المتعلقة بالمتجهات.

تعريفات وبراهين

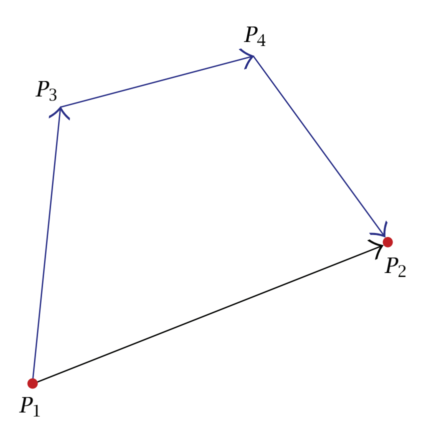
ليكن P_1 وP_2 أي نقطتين في الفراغ، وارسم خطًّا (سهمًا) من P_1 إلى P_2. سوف نسمي P_2 «رأس» السهم ونوضحها بالرمز <. أحيانًا نسمي P_1 «ذيل» السهم. يُمَثِّل السهم (والذي سوف نسميه متجه $\vec{A}$) إزاحةً؛ أي التغير في موضع جسيم يتحرك (أو يُحَرَّك) من P_1 إلى P_2. إذا اعتبرنا P_1 وP_2 نقطتين على مسار الجسيم، فسوف ندرك أن هناك العديد من المسارات المحتملة من P_1 إلى P_2. على سبيل المثال (شكل ١)، إذا أرشدنا الجسيم بأيدينا، يمكننا أن نحركه على خط مستقيم من P_1 إلى P_3، ثم على خط من P_3 إلى P_4، وبعدها على خط من P_4 إلى P_2 المتجه $\vec{A}$ يمثل التأثير المحصِّل لتلك الإزاحات الثلاث المتتالية. يرمز لطول (أو «مقدار») $\vec{A}$ بالرمز $|\vec{A}|$ أو A، وهو المسافة (عدد موجب دائمًا) بين P_1 وP_2. نفضل استخدام كلمة «مقدار» عن كلمة «طول»؛ لأن المتجهات قد تُمثِّل كيانات (مثل السرعات والتسارعات) أبعادها ليست أبعاد الطول. يمكن وصف اتجاه $\vec{A}$ رياضياتيًّا (مثلًا بواسطة إحداثيين قطبيين على كرة)، لكننا نتعمد في هذه المرحلة الامتناع عن تقديم أي مجموعة معينة من المحاور.

إذا كان α عددًا حقيقيًّا موجبًا، نعرِّف المتجه $\alpha\vec{A}$ بأنه متجه له نفس اتجاه $\vec{A}$ ومقداره $\alpha|\vec{A}|$. وإذا كان α عددًا حقيقيًّا سالبًا، فإن $\alpha\vec{A}$ يُعرَّف بأنه متجه في اتجاه متعاكس (موازٍ في اتجاه عكسي) مع $\vec{A}$ مقداره $-\alpha|\vec{A}|$؛ وبالتالي فإن $-1.7\vec{A}$ يشير في اتجاه عكس $\vec{A}$ ومقداره يساوي $1.7 \times$ (مقدار $\vec{A}$) .

عندما نُمثِّل إزاحة بواسطة متجه، فربما يكون الموقع الفعلي للمتجه في الفراغ ذا مغزى ما أو ربما لا يكون كذلك. نعتبر على وجه العموم أن المتجه يُعرَّف كليًّا بمقداره



شكل ١: متجه $\vec{A}$ بين نقطتين P_1 وP_2.

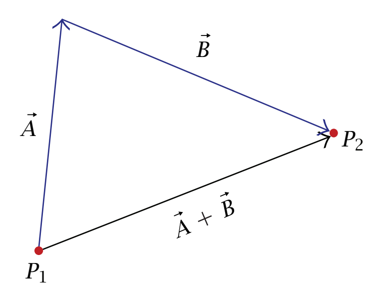


شكل ٢: هناك عدة مسارات من P_1 إلى P_2.

واتجاهه؛ لا تتغير هذه الصفات بتحريك المتجه إلى موقع آخر مع الحفاظ على اتجاهه (تسمى هذه الحركة الانتقال الموازي). إذا كان موقع المتجه مهمًّا، فلن نكتفي بتعيين مقدار واتجاه المتجه فقط، وإنما نعين أيضًا موقع رأسه أو ذيله.

لقد عرَّفنا بالفعل عملية ضرب متجه في عدد حقيقي؛ ناتج هذه العملية هو أيضًا متجه. نُعرِّف الآن جمع المتجهات؛ أي عملية جمع متجهين أو أكثر. قد يعتبر شخص ما أن المتجهات تُمثِّل إزاحات، لكن نفس التعريف يُستَخدم عندما تُمثل المتجهات سرعات، وقوى، أو أي شيء آخر.

إذا اعتبرنا $\vec{A}$ و$\vec{B}$ إزاحتين، فإن المتجه $\vec{A}+\vec{B}$ يُعرَّف بأنه الإزاحة الكلية الناتجة عندما يتعرض جسم ما (على سبيل المثال، كتلة نقطية) للإزاحة $\vec{A}$ متبوعة بالإزاحة $\vec{B}$.

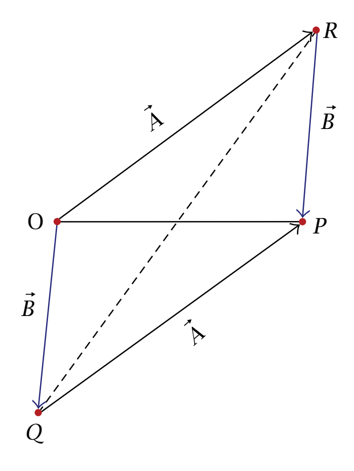


شكل ٣: المتجه الناتج من جمع $\vec{A}$ و$\vec{B}$.

هندسيًّا (شكل ٣)، إذا رسمنا المتجه $\vec{A}$ ورسمنا بعد ذلك المتجه $\vec{B}$، عن طريق وضع ذيل $\vec{B}$ على رأس $\vec{A}$، فإن $\vec{A}+\vec{B}$ هو المتجه من ذيل $\vec{A}$ إلى رأس $\vec{B}$. بالمثل، $\vec{A}+\vec{B}$ هو المتجه الذي يمثل الإزاحة الكلية الناتجة عندما يتعرض جسم ما للإزاحة $\vec{B}$ متبوعة بالإزاحة $\vec{A}$.

إذا رسمنا متوازي الأضلاع $ORPQ$ (شكل ٤) بحيث يكون ضلعاه هما $\vec{A}$ و$\vec{B}$، نرى أن المتجه من O إلى P يمثل ناتج عمل الإزاحة $\vec{A}$ متبوعة بالإزاحة $\vec{B}$، وأيضًا يمثل ناتج عمل الإزاحة $\vec{B}$ متبوعة بالإزاحة $\vec{A}$. لأي متجهين (ليس بالضرورة أن يمثِّلا إزاحتين) يُعرَّف الجمع المتجهي $\vec{A}+\vec{B}$ بالإنشاء الهندسي الموضح في شكل ٣. وبذلك نرى أن $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$؛ أي إن الجمع المتجهي يكون إبداليًّا. نُعرِّف $\vec{A}-\vec{B}$ بأنه مجموع المتجه $\vec{A}$ والمتجه $-\vec{B}$؛ أي إن $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$. في شكل ٤ افترض أننا استبدلنا المتجه من P إلى R بدلًا من المتجه من P إلى R. بما أن المتجه من Q إلى P هو المتجه $\vec{A}$ والمتجه من P إلى R هو $-\vec{B}$، نرى أن المتجه من Q إلى R هو $\vec{A}+(-\vec{B})=\vec{A}-\vec{B}$.

في شكل ٢ لتكن $\vec{B}$، و$\vec{C}$، و$\vec{D}$، على الترتيب، متجهات من P_1 إلى P_3، ومن P_3 إلى P_4 ومن P_4 إلى P_2. وبهذا يكون $\vec{B}+\vec{C}$ هو المتجه من P_1 إلى P_4، و$(\vec{B}+\vec{C})+\vec{D}$ هو المتجه من P_1 إلى P_2. $\vec{C}+\vec{D}$ هو المتجه من P_3 إلى P_2، و$\vec{B}+(\vec{C}+\vec{D})$ هو المتجه من P_1 إلى P_2؛ وبذلك يكون $(\vec{B}+\vec{C})+\vec{D}=\vec{B}+(\vec{C}+\vec{D})$؛ أي إن الجمع المتجهي يكون إدماجيًّا ويمكن حذف الأقواس. لاحظ أن البرهان لا يفترض وقوع P_1, P_2, P_3, P_4 في نفس المستوى. يمكن أيضًا تعميم البرهان ليشمل جمع أي عدد من المتجهات.

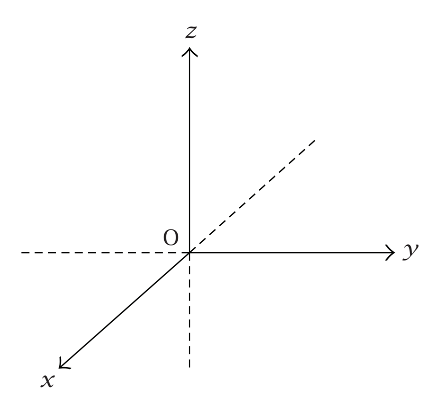


شكل ٤: متوازي أضلاع يتكون من متجهين $\vec{A}$ و$\vec{B}$.

وأخيرًا، يقتضي كلٌّ من تعريفي جمع المتجهات وضرب متجه في عدد حقيقي α ضمنًا وجود الخاصية التوزيعية $\alpha(\vec{A}+\vec{B}) = \alpha\vec{A}+\alpha\vec{B}$.

تعمدنا تقديم التعريفات والبراهين السابقة دون إدخال أي مجموعة من المحاور (مجموعة المحاور هي نظام إحداثي) لكي نؤكد على أن المتجهات تتيح لنا التمكن من ذكر العلاقات بين الكميات الفيزيائية دون التقيد بأي اختيار معين لمجموعة من المحاور. في الحسابات الفعلية، يكون غالبًا من المناسب إدخال محاور.

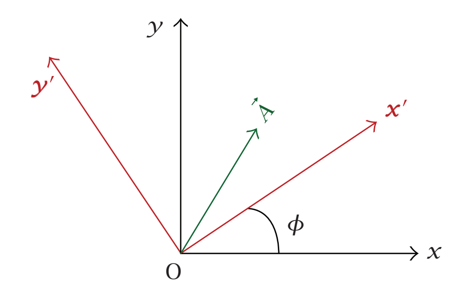
نقدم الآن ثلاثة محاور يمينية متعامدة (x, y, z) تمر خلال نقطة أصل O مشتركة. إذا كنا بصدد دراسة متجهات تُمثِّل أطوالًا، فإن كل نقطة على المحور x لديها عدد مصاحب لها، مقدار العدد مساوٍ لبعدها عن نقطة الأصل (مقيسًا بوحدات الطول التي نستخدمها أيًّا كانت). إشارة العدد موجبة على أحد جانبي نقطة الأصل وسالبة على الجانب الآخر. بالمثل، تُعيَّن أعداد لكل نقطة على المحورين y وz. الجزء الموجب من كل محور في شكل ٥ هو خط متصل، والجزء السالب هو خط متقطع. إذا كنَّا (على سبيل المثال) معنيين بدراسة متجهات تُمثِّل سرعات، فإن الأعداد على المحور x سوف تكون سرعات (مقيسة بوحدات السرعة التي نستخدمها أيًّا كانت)، ويمثل محور x الموجب سرعات في اتجاه زيادة x ويمثل محور x السالب سرعات في اتجاه نقصان x.



شكل ٥: ثلاثة محاور يمينية متعامدة (x, y, z).

إذا وضعنا ذيل متجه $\vec{A}$ عند نقطة الأصل، فإننا نطلق على المركبات الكارتيزية لرأس المتجه (A_x, A_y, A_z). تذكر: إذا مرَّرنا مستوى، متعامدًا مع المحور x، خلال رأس المتجه $\vec{A}$، فإن الإحداثي x للنقطة التي يقطع عندها المستوى المحور x هو A_x. بالإضافة إلى ذلك، $A_x = |\vec{A}| \cos\alpha$؛ حيث α الزاوية بين $\vec{A}$ ومحور x الموجب. تُطبَّق نفس الملاحظة على A_y وA_z. كثيرًا ما نطلق على A_x «المركبة x للمتجه A».

من تعريف جمع متجهين، نرى أن المركبة x والمركبة y والمركبة z لـ $\vec{A} + \vec{B}$ هي $A_x + B_x$ و $A_y + B_y$ و$A_z + B_z$. بالمثل، المركبة x لـ $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ هي $A_x + B_x + C_x$، وهكذا.



شكل ٦: مركبات المتجه $\vec{A}$ تعتمد على أيٍّ من المحاور نستخدم.

المقدار $|\vec{A}|$ للمتجه $\vec{A}$ هو (طبقًا لنظرية فيثاغورس):

$$\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{A-1}$$

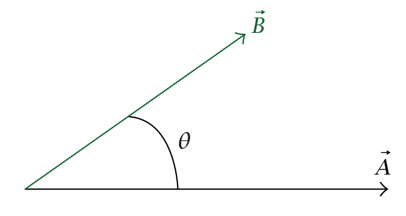
إذا كانت محاوري (x, y, z) تصطف بطريقة مختلفة عن محاورك (x', y', z')، فإننا مع ذلك نتفق على طول المتجه $\vec{A}$؛ أي إن $A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2$. على وجه العموم، يتطلب تعيين اصطفاف محاورك بالنسبة لمحاوري ثلاث زوايا. بالنسبة للحالة البسيطة التي يكون فيها المحوران z وz' منطبقين والزاوية بين المحورين x غير المميز والمميز هي ϕ، تكون العلاقة بين مركبات $\vec{A}$ غير المميزة والمميزة هي:

$$A_{z'} = A_z,$$

$$A_{x'} = A_x \cos\phi + A_y \sin\phi, \tag{A-2}$$

$$A_{y'} = A_y \cos\phi - A_x \sin\phi,$$

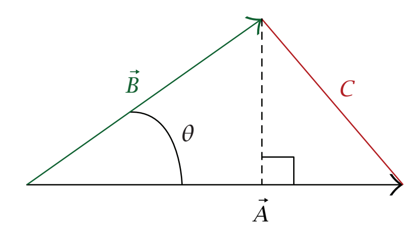
ونرى على الفور، كما هو متوقع أن $A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$. في الحالة الأعم، تكون العمليات الجبرية أكثر تعقيدًا قليلًا، لكن بالطبع تظل النتيجة كما هي.



شكل ٧: متجهان عند زاويتين مختلفتين.

الزاوية بين متجهين هي كمية أخرى من الكميات التي يكون من الواضح أنها لا تعتمد على اصطفاف المحاور. إذا سمَّينا هذه الزاوية θ، فإن الصيغة الخاصة بها (باستخدام المركبات) تكون:

$$\cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right|}. \tag{A-3}$$



شكل ٨: قانون جيب التمام مطبق على الأطوال المتجهية.

لإثبات ذلك، تذكَّر صيغة حساب المثلثات من المرحلة الثانوية (انظر شكل ٨):

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta \qquad \text{(A-4)}$$

(والتي بُرهنت بإنشاء الخط المتقطع في شكل ٨ وتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلث القائم الذي وتره C وضلعاه الآخران هما $B\sin\theta$ و$A - B\cos\theta$). ولكن C هو طول المتجه $\vec{A} - \vec{B}$، الذي تكون مركباته هي $A_x - B_x$، وهكذا؛ وبذلك يكون $C^2 = (A_x - B_x)^2 + \cdots = A^2 + B^2 - 2(A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)$ والذي يؤدي — بدمجه مع المعادلة (A-4) — إلى المعادلة (A-3). وبما أن $\cos\theta = \cos(360 - \theta)$ فلن يكون هناك فرق سواء عرَّفنا θ بأنها الزاوية الداخلية أو الخارجية في شكل ٧.

يُعرَّف الضرب القياسي لمتجهين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ بأنه $|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$؛ حيث θ الزاوية بين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ ويُشار له بـ $\vec{A}\cdot\vec{B}$. من المعادلة (A-3) لدينا:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\;\left|\vec{B}\right|\cos\theta = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \qquad \text{(A-5)}$$

الضرب القياسي مفيد على وجه الخصوص في استنتاج نظرية الشغل والطاقة في قسم [نظرية الشغل والطاقة]. نؤكد على أن الضرب القياسي هو عدد (قد يكون له أبعاد)، وليس متجهًا، وأن هذا العدد لا يعتمد على طريقة اصطفاف محاورنا. من (A-5) يتضح أن $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ وأن $(\alpha\vec{A})\cdot\vec{B} = \alpha(\vec{A}\cdot\vec{B})$. بالإضافة إلى ذلك، بما أن مركبات $\vec{B}+\vec{C}$ هي $(B_x + C_x, \ldots)$، فإننا نرى أن $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C} = (\vec{B}+\vec{C})\cdot\vec{A}$.

إذا كان المتجه $\vec{A}$ يمثل إزاحة، فإن A_x، وA_y، وA_z، و$|\vec{A}|$ جميعها لها أبعاد الطول. إذا أنشأنا المتجه $\vec{A}/|\vec{A}|$، فإن مركبات هذا المتجه هي عدد لابُعْدِي، ومقدار هذا

المتجه هو العدد اللابُعْدِي «١». المتجه اللابُعْدِي الذي مقداره «١» يسمى متجه وحدة. نرمز لمتجه الوحدة بحرف عليه العلامة «$\hat{}$» بدلًا من السهم؛ وبذلك إذا رمزنا للمتجه $\vec{A}/|\vec{A}|$ بالرمز $\hat{e}$، فإن $\hat{e}$ هي متجه وحدة يشير في نفس اتجاه $\vec{A}$.

نُعَرِّف متجهات الوحدة $\hat{\imath}$، و$\hat{\jmath}$، و$\hat{k}$ التي تشير (في الاتجاه الموجب) على طول محاورنا x، وy، وz على الترتيب. وبهذا يكون $\hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ و$\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = 0$. إذا كانت مركبات المتجه $\vec{A}$ هي (A_x, A_y, A_z) فإن $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$.

يُنشئ الضرب القياسي عددًا من متجهين. هناك نوع آخر من الضرب، يسمى الضرب المتجهي، يُنشئ متجهًا من متجهين. قد يبدو تعريف الضرب المتجهي غريبًا قليلًا، لكنه في الواقع هيئة «طبيعية» رياضياتية؛ فهو الطريقة الوحيدة لدمج متجهين ($\vec{A}$) و($\vec{B}$) لتكوين متجه ثالث $\vec{C}$ مع مراعاة المتطلبات الآتية:

(١) مقدار واتجاه $\vec{C}$ لا يعتمد على طريقة اصطفاف محاورنا ولا يشترط وجود اتجاهات مفضلة في الفراغ لإنشاء $\vec{C}$.

(٢) $\vec{C}$، يُعتبر دالة في $\vec{A}$ و$\vec{B}$، تمتلك خاصية التوزيع في كلا المتغيرين.

الضرب المتجهي مفيد في مناقشة حركة الأجرام السماوية وفي مناقشة الأجسام أو مجموعات من الأجسام التي يمكن أن يكون لديها حركة دورانية وحركة انتقالية.

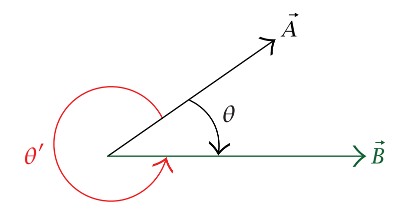
يُعَرَّف الضرب المتجهي (يُشار إليه بـ $\vec{A}\times\vec{B}$) كما يلي:

(١) أحضر ذيلَيْ $\vec{A}$ و$\vec{B}$ لينطبقا أحدهما على الآخر (باستخدام الانتقال الموازي) ولتكن الصفحة هي المستوى الذي يحوي $\vec{A}$ و$\vec{B}$. عرِّف $\hat{e}$ بأنه متجه وحدة عمودي على الصفحة ويشير إلى داخل الصفحة؛ عرِّف $\hat{e}'$ بأنه متجه وحدة عمودي على الصفحة ويشير إلى خارج الصفحة. من الواضح أن $\hat{e}' = -\hat{e}$.

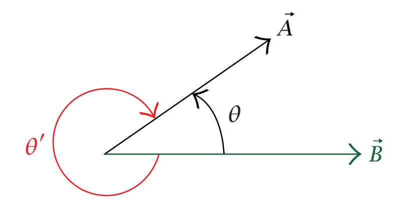
(٢) تخيل الآن أنك تقوم بإدارة $\vec{A}$ حتى يشير إلى نفس اتجاه $\vec{B}$. يمكن إنجاز ذلك إما عن طريق دوران في اتجاه عقارب الساعة خلال زاوية θ أو دوران عكس اتجاه عقارب الساعة خلال زاوية $(\theta + \theta' = 360^\circ)$ θ'.

(٣) كما حددنا

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \sin\theta\hat{e} = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \sin\theta'\hat{e}'. \qquad \text{(A-6)}$$



شكل ٩: دوران أحد المتجهين في اتجاه الآخر.



شكل ١٠: عكس دوران أحد المتجهين في اتجاه الآخر.

ملاحظات. $\hat{e}\sin\theta = \hat{e}'\sin\theta'$؛ لأن $\hat{e}' = -\hat{e}$ و$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$. إلى جانب ذلك، لا يعتمد تعريف $\vec{A}\times\vec{B}$ على أي جانبي الورقة تكون عليه. إذا كنت على هذا الجانب من الورقة وكان هناك راصد آخر على الجانب الآخر، فإن «دورانك في اتجاه عقارب الساعة» هو ما يطلق عليه الراصد الآخر «دوران في عكس اتجاه عقارب الساعة». طبقًا للراصد الآخر، فإن متجهك $\hat{e}'$ هو متجه وحدة يشير إلى داخل الصفحة (أي إنه يشير بعيدًا عن الراصد) ومتجهك $\hat{e}$ يشير في اتجاه خارج من الصفحة (أي في اتجاه الراصد). وبذلك فإن الراصد الآخر سوف يكتب هو أيضًا المعادلة (A-6).

كثيرًا ما يُتخذ المسمار اليميني كمرجع لتلخيص المعادلات (A-6)، وهو النوع الوحيد الذي يمكنك شراؤه من محلات الأدوات. أحضر ذيلَيْ $\vec{A}$ و$\vec{B}$ لينطبقا أحدهما على الآخر باستخدام الانتقال الموازي، وضَعْ محور مسمار يميني على طول الخط L الذي

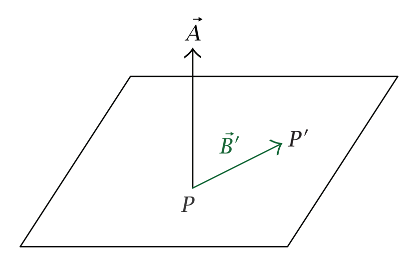
يمر بالذيل المشترك عموديًّا على مستوى $\vec{A}$ و$\vec{B}$. لا يهم أي اتجاه يشير إليه المسمار. ثم تخيل إدارة $\vec{A}$ حول الخط L كمحور دوران حتى ينطبق اتجاها $\vec{A}$ و$\vec{B}$. إذن:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \; \left|\vec{B}\right| \; \sin \alpha \hat{u}, \qquad \text{(A-7)}$$

حيث α هي الزاوية التي أُدير خلالها $\vec{A}$ و$\hat{u}$ متجه وحدة يشير على طول الخط L في الاتجاه الذي سيتحرك نحوه المسمار أثناء الدوران. بما أن الدوران كان يمكن إجراؤه في أي الاتجاهين، فإن المعادلة (A-7) تغطي كلا الحدين في (A-6).

من المهم ملاحظة أنه في تعريف $\vec{A} \times \vec{B}$، نُدير $\vec{A}$ (المتجه الأول في ترتيب الضرب المتجهي) حتى ينطبق اتجاهه على اتجاه $\vec{B}$. إذا كان دوران $\vec{A}$ في اتجاه عقارب الساعة خلال زاوية θ سوف يجعل $\vec{A}$ و$\vec{B}$ منطبقين، فإن دوران $\vec{B}$ في عكس اتجاه عقارب الساعة خلال زاوية θ سوف يجعل الاتجاهين منطبقين. ينتج من المعادلة (A-6) أن:

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}. \qquad \text{(A-8)}$$



شكل ١١: المستوى العمودي على المتجه $\vec{A}$.

نلاحظ أن الضرب المتجهي لمتجهين متوازيين في نفس الاتجاه أو متوازيين في عكس الاتجاه يكون صفرًا؛ لأن $\sin(0°) = \sin(180°) = 0$.

من المعادلات (A-6)، من السهل توضيح أن لأيِّ عدد حقيقي a (موجب أو سالب) $(a\vec{A}) \times \vec{B} = a(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times (a\vec{B})$.

يشكل إثبات خاصية التوزيع:

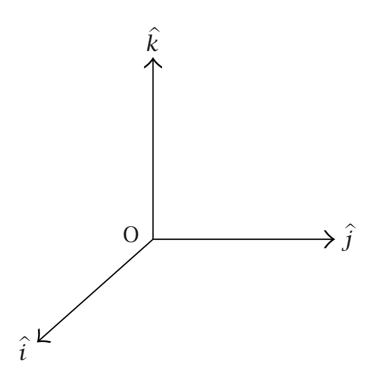
$$\vec{A} \times \left(\vec{B}_1 + \vec{B}_2\right) = \vec{A} \times \vec{B}_1 + \vec{A} \times \vec{B}_2 \qquad \text{(A-9)}$$

يشكل تحديًا أكبر ويمكن، بالطبع، أن يحذفه القارئ المهتم فقط بالنتائج. لإثبات المعادلة (A-9) من المفيد تصور $\vec{A}\times\vec{B}$ بطريقة مختلفة قليلًا. نرسم المتجهين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ بحيث يكون ذيلاهما متلامسين عند نقطة نسميها P. ليكن $\vec{B}'$ هو مسقط $\vec{B}$ على هذا المستوى. [أي خط عمودي على المستوى ويمر خلال رأس $\vec{B}$ سوف يقطع المستوى عند نقطة P' و$\vec{B}'$ هو المتجه من P إلى P'.] إذا كانت θ هي أصغر الزاويتين بين $\vec{A}$ و$\vec{B}$ فإن $0\le\theta\le180^\circ$ و$\sin\theta\ge0$؛ وبذلك يكون $|\vec{B}'|=|\vec{B}|\sin\theta$ و$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{A}\times\vec{B}'=|\vec{A}|\vec{B}''$؛ حيث إن المتجه $\vec{B}''$ في المستوى (إذا ما نُظر إليه من نقطة على رأس $\vec{A}$) وينتج من دوران $\vec{B}'$ في عكس اتجاه عقارب الساعة خلال زاوية 90°.

ليكن $\vec{B}_1$ و$\vec{B}_2$ متجهين اختياريين، إذن ننشئ $\vec{B}_1''$ عن طريق إسقاط $\vec{B}_1$ على المستوى العمودي على $\vec{A}$ وإدارة المسقط في عكس اتجاه عقارب الساعة خلال زاوية 90°. وبالمثل، ننشئ $\vec{B}_2''$. نتذكر أننا ننشئ $\vec{B}_1+\vec{B}_2$ بوضع ذيل $\vec{B}_1$ عند P ووضع ذيل $\vec{B}_2$ عند رأس $\vec{B}_1$، ثم نرسم بعد ذلك سهمًا من P إلى رأس $\vec{B}_2$؛ وبذلك فإذا كان مسقطا $\vec{B}_1$ و$\vec{B}_2$ على المستوى العمودي على $\vec{A}$ هما $\vec{B}_1'$ و$\vec{B}_2'$، إذن فمسقط $(\vec{B}_1+\vec{B}_2)$ على المستوى هو $\vec{B}_1'+\vec{B}_2'$. وإذا أدرنا المتجه $\vec{B}_1'+\vec{B}_2'$ عكس اتجاه عقارب الساعة خلال زاوية 90°، فإن المتجه الناتج، الذي سوف نسميه $(\vec{B}_1+\vec{B}_2)''$ هو نفسه المتجه الذي سنحصل عليه بإدارة $\vec{B}_1'$ و$\vec{B}_2'$ في البداية خلال زاوية 90° (لنحصل على $\vec{B}_1''$ و$\vec{B}_2''$) ثم إنشاء المجموع المتجهي $\vec{B}_1''+\vec{B}_2''$؛ وبذلك فقد وضحنا أن $(\vec{B}_1+\vec{B}_2)''=\vec{B}_1''+\vec{B}_2''$، وأثبتنا، بما أن $\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}|\vec{B}''$، المعادلة (A-9). أخيرًا، بما أن $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$، فإن الخاصية التوزيعية تطبق أيضًا على المعامل الأول:

$$\left(\vec{B}_1+\vec{B}_2\right)\times\vec{A}=\vec{B}_1\times\vec{A}+\vec{B}_2\times\vec{A}. \qquad \text{(A-10)}$$

إذا أدخلنا مجموعة محاور معينة لها متجهات وحدة $\hat{i}$، و$\hat{j}$، و$\hat{k}$ تشير للاتجاه الموجب على طول المحاور x، وy، وz، وكتبنا $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ و $\vec{B}=B_x\hat{i}+\cdots$؛ فإن الخاصية التوزيعية في الضرب المتجهي تمكننا من حساب مركبات $\vec{A}\times\vec{B}$. نعلم أن $\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$. مفاهيميًّا، نستخدم محاور يمينية (شكل ١٢) لها الخاصية $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$ (مما ينتج أن $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$ و$\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$). [إذا مددت إصبع الإبهام



شكل ١٢: متجهات الوحدة هذه تكون مجموعة محاور يمينية؛ أي نظام إحداثيات يميني.

($\hat{i}$)، وإصبع السبابة ($\hat{j}$) وإصبع الوسطى ($\hat{k}$) ليدك اليمنى بحيث تكون جميعها متعامدة بعضها على بعض، فإنها تكون مجموعة محاور يمينية.] نجد أن:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \hat{i} + \left(A_z B_x - A_x B_z\right) \hat{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right) \hat{k}. \tag{A-11}$$

كثيرًا ما نتعامل مع متجهات تتغير مع الزمن. على سبيل المثال، إذا كان $\vec{r}$ هو المتجه من نقطة أصل ثابتة إلى الموضع اللحظي لجسيم متحرك، فإن $d\vec{r}/dt$ هو متجه سرعة الجسيم. تُعَرَّف مشتقة متجه $\vec{A}(t)$ تمامًا بنفس طريقة تعريف مشتقة دالة $f(t)$؛ أي إن:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t + \Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}. \tag{A-12}$$

إذا كان $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ ومتجهات الوحدة $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ثوابت مع الزمن، فإن:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \hat{i}\frac{dA_x}{dt} + \hat{j}\frac{dA_y}{dt} + \hat{k}\frac{dA_z}{dt}. \tag{A-13}$$

يمكن الحصول على مشتقة الضرب القياسي بطريقة مباشرة من المعادلة (A-5) أو (دون إدخال متجهات وحدة) من المعادلة (A-12). على سبيل المثال:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\vec{A}\left(t+\Delta t\right)\cdot\vec{B}\left(t+\Delta t\right)-\vec{A}\left(t\right)\cdot\vec{B}\left(t\right)\right]}{\Delta t}. \qquad \text{(A-14)}$$

إذا أضفنا صفرًا (في هيئة $\vec{A}(t+\Delta t)\cdot\vec{B}(t)-\vec{A}(t+\Delta t)\cdot\vec{B}(t)$) إلى بسط المعادلة (A-14)، فإن الجانب الأيمن لهذه المعادلة يصبح:

$$\frac{\left[\vec{A}\left(t+\Delta t\right)\cdot\left(\vec{B}\left(t+\Delta t\right)-\vec{B}\left(t\right)\right)+\left(\vec{A}\left(t+\Delta t\right)-\vec{A}\left(t\right)\right)\cdot\vec{B}\left(t\right)\right]}{\Delta t}. \qquad \text{(A-15)}$$

بجعل $\Delta t \to 0$ نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = \vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\cdot\vec{B} \qquad \text{(A-16)}$$

ولاحظ أن ترتيب المعاملات في الحدين غير مهم؛ لأن $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$. يمكننا إجراء نفس المعالجة للضرب المتجهي (بالتعويض بـ × بدلًا من ⋅) لكن يجب أن نتخذ الحذر بإبقائنا على ترتيب المعاملات؛ لأن $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$؛ وبذلك نحصل على:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{A}\times\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)+\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)\times\vec{B}. \qquad \text{(A-17)}$$

(٢) ملحق (ب)

(٢-١) نظريات مفيدة عن الطاقة، وكمية التحرك الزاوي، وعزم القصور الذاتي

تذكر أن تعريف مركز الكتلة (CM) لتجمُّع من الجسيمات هو:

$$M\vec{R}_{\text{CM}} = \sum_i m_i\vec{r}_i \quad \left(M=\sum_i m_i\right). \qquad \text{(B-1)}$$

وعلى نحو مكافئ

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = 0 \quad \text{where } \vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{R}_{\text{CM}}. \qquad \text{(B–2)}$$

بتفاضل المعادلة (B–2) بالنسبة للزمن نحصل على:

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0 \quad \text{where } \vec{v}'_i = \frac{d\vec{r}'_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{V}_{\text{CM}}. \qquad \text{(B–3)}$$

افترض أن لدينا إطارًا قصوريًّا $\text{O}\hat{i}\,\hat{j}\,\hat{k}$ (نقطة أصل اختيارية O ومجموعة محاور غير دوارة بالنسبة لنجوم بعيدة) وإطارًا قصوريًّا آخر $\text{O}'\hat{i}'\,\hat{j}'\,\hat{k}'$ (حيث O' مركز كتلة نظامنا و$\hat{i}'\,\hat{j}'\,\hat{k}'$ هي غير دوارة أيضًا). طاقة حركة (KE) نظامنا، كما تقاس في الإطار $\text{O}\hat{i}\hat{j}\hat{k}$، هي:

$$\text{KE}_{\text{O}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2. \qquad \text{(B–4)}$$

طاقة الحركة كما تقاس في الإطار $\text{O}'\hat{i}'\,\hat{j}'\,\hat{k}'$، هي:

$$\text{KE}_{\text{CM}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2. \qquad \text{(B–5)}$$

نظرية. $\text{KE}_{\text{O}} = \text{KE}_{\text{CM}} + (1/2)MV_{\text{CM}}^2$.

البرهان ببساطة أن تكتب $v_i^2 = (\vec{v}'_i + \vec{V}_{\text{CM}}) \cdot (\vec{v}'_i + \vec{V}_{\text{CM}})$ مع ملاحظة تلاشي حد الضرب في المربع؛ لأن $\sum m_i \vec{v}'_i = 0$.

كمية التحرك الزاوية، كما تقاس في الإطار $\text{O}\hat{i}\,\hat{j}\,\hat{k}$، هي:

$$\vec{L}_{\text{O}} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \qquad \text{(B–6)}$$

نستبدل $\vec{R}_{\text{CM}} + \vec{r}'_i$ بدلًا من $\vec{r}_i$، و$\vec{V}_{\text{CM}} + \vec{v}'_i$ بدلًا من $\vec{v}_i$. يتلاشى حدان من الحدود الأربعة في مفكوك $\vec{L}_{\text{O}}$، وهما $[\vec{R}_{\text{CM}} \times \sum m_i \vec{v}'_i = 0$ و$\sum m_i \vec{r}'_i \times \vec{V}_{\text{CM}} = 0]$. بتعريف:

$$\vec{L}_{\text{CM}} = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}'_i \qquad \text{(B–7)}$$

يكون لدينا:

$$\textbf{Theorem:}\quad \vec{L}_{\mathrm{O}} = \vec{L}_{\mathrm{CM}} + M\vec{R}_{\mathrm{CM}} \times \vec{V}_{\mathrm{CM}}. \tag{B-8}$$

ناقشنا بالفعل حقيقة أن القوى القصورية في نظام ما لا تسهم في القوة الكلية والعزم الكلي المؤثرَين على النظام. واستنتجنا النتيجة $\vec{\tau}_{0,\mathrm{ext}} = d\vec{L}_0/dt$؛ حيث

$$\vec{\tau}_{0,\mathrm{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\mathrm{ext}} \tag{B-9}$$

و$\vec{F}_{\mathrm{ext}}$ هي القوة الخارجية المؤثرة على الجسيم رقم i. بكتابة $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{R}_{\mathrm{CM}}$ نجد أن:

$$\vec{\tau}_{0,\mathrm{ext}} = \vec{\tau}_{\mathrm{CM,ext}} + \vec{R}_{\mathrm{CM}} \times \vec{F}_{\mathrm{ext}}, \tag{B-10}$$

حيث $\vec{\tau}_{\mathrm{CM,ext}}$ هو العزم (نتيجة القوى الخارجية) المقيس في مركز كتلة النظام، و$\vec{F}_{\mathrm{ext}}$ هي القوة الخارجية الكلية. نلاحظ من المعادلة (B-8) أن:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d\vec{L}_{\mathrm{CM}}}{dt} + M\vec{V}_{\mathrm{CM}} \times \vec{V}_{\mathrm{CM}} + \vec{R}_{\mathrm{CM}} \times M\vec{A}_{\mathrm{CM}}. \tag{B-11}$$

الحد الثاني على يمين المعادلة (B-11) يساوي صفرًا، والحد الثالث يساوي $\vec{R}_{\mathrm{CM}} \times \vec{F}_{\mathrm{ext}}$. وعليه يكون لدينا:

$$\textbf{Theorem:}\quad \vec{\tau}_{\mathrm{CM,ext}} = \frac{d\vec{L}_{\mathrm{CM}}}{dt}. \tag{B-12}$$

وعلى وجه الخصوص، هذه النظرية تعني ضمنًا أن جسمًا ما (أو تجمعًا من الجسيمات) يسقط تحت تأثير مجال جاذبية منتظم، فإن كمية التحرك الزاوية للنظام حول مركز كتلته CM تظل ثابتة (لأن الجاذبية لا تبذل عزمًا حول CM).

تذكر أن عزم القصور الذاتي لجسم ما، حول خط L، هو حاصل جمع العناصر الكتلية للجسم مضروبًا في مربع بُعد العنصر عن الخط L. من النظريات المفيدة، والتي من الأسهل التعبير عنها بالكلام، هي نظرية المحور الموازي: إذا كان I هو عزم القصور الذاتي لجسم ما حول خط L، وكان I' عزم القصور الذاتي للجسم حول خط L'

موازيًا للخط L ويمر خلال مركز الكتلة CM، فإن $I = I' + Ma^2$؛ حيث a المسافة العمودية بين L وL'، وM هي كتلة الجسم.

برهان. لتكن O نقطة على الخط L وليكن $\hat{e}$ متجه وحدة يشير (في أيٍّ من الاتجاهين) بطول L. ليكن $\vec{r}_i$ متَّجهًا من O إلى عنصر الكتلة m_i. فيكون:

$$I = \sum_i m_i \left[\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i - (\hat{e} \cdot \vec{r}_i)^2 \right]. \tag{B–13}$$

إذا كان O' هو مركز الكتلة CM و$\vec{r}_i'$ المتجه من O' إلى عنصر الكتلة m_i، فإن $I' = \sum m_i [\vec{r}_i' \cdot \vec{r}_i' - (\hat{e} \cdot \vec{r}_i')^2]$. إذا كان $\vec{R}$ هو المتجه من O إلى O' فإن $\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$. بإدخال هذا في معادلة I نرى أن الحدين $2\vec{R} \cdot \sum m_i \vec{r}_i'$ و$2\hat{e} \cdot \sum m_i \vec{r}_i'$ يتلاشيان؛ لأن $\sum m_i \vec{r}_i' = 0$. وبهذا يكون:

$$I = I' + M \left[\vec{R} \cdot \vec{R} - \left(\hat{e} \cdot \vec{R} \right)^2 \right] = I' + Ma^2. \tag{B–14}$$

ناقشنا في الفصل الثامن بعض الأمثلة البسيطة لحركة الجسم الجاسئ، وفيها كانت السرعة الزاوية $\omega \hat{j}$ عمودية على الصفحة، وكان الجسم شكلًا يدور حول محور الدوران $\hat{j}$. ويهمنا كمية التحرك الزاوية $\vec{L}_O = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$؛ حيث O نقطة مثبتة في الجسم و$\vec{r}_i$ متجه من O إلى m_i و$\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt$. نكتب $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$؛ حيث $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ متجهات مثبتة في الجسم. الإحداثيات x_i, y_i, z_i لا تتغير مع الزمن، ولكن متجهي الوحدة $\hat{i}$ و$\hat{k}$ يدوران مع الجسم. نرى بسهولة أن $d\hat{i}/dt = \omega \hat{j} \times \hat{i} = -\omega \hat{k}$ و$d\hat{k}/dt = \omega \hat{j} \times \hat{k} = \omega \hat{i}$. وبهذا يكون $\vec{v}_i = -\omega x_i \hat{k} + \omega z_i \hat{i}$ ويكون:

$$\vec{L}_O = \omega \sum_i m_i \left[\left(x_i^2 + z_i^2 \right) \hat{j} - x_i y_i \hat{i} - y_i z_i \hat{k} \right]. \tag{B–15}$$

الحد الأول في الطرف الأيمن للمعادلة (B–15) ما هو إلا عزم القصور الذاتي حول المحور $\hat{j}$ خلال النقطة O. تتلاشى الحدود الأخرى إذا كان للجسم تماثل كافٍ: إذا كان الجسم شكلًا يدور حول المحور y، فإنه يوجد عنصر كتلة مساوٍ عند (x, y) إذا كان هناك عنصر كتلي عند $(-x, y)$، ويتلاشى حاصل الجمع الثاني على اليمين (مثلما هي الحال مع حاصل الجمع الثالث)؛ بالمثل، إذا كان الجسم متماثلًا حول المستوى $y = 0$ بحيث يوجد عنصرا كتلة متساويان عند (x, y) و$(x, -y)$، فإن حاصلي الجمع الثاني

والثالث على اليمين يتلاشيان. في هذه الحالات يمكننا كتابة $\vec{L} = I\omega\hat{j}$، كما في الحالة ثنائية البُعد. □

في الفصل الثامن أثبتنا نظرية الشغل والطاقة لجسم جاسئ دوَّار حول نقطة ثابتة (انظر المعادلتين (8-50) و(8-51)). تمديد البرهان في الفصل الثامن، باستخدام معادلتي القوة والعزم لوصف حركة اختيارية لجسم جاسئ، ينطوي على المعالجات المتجهية المعقدة قليلًا، ولم يكن من المناسب إقحامها هنا. لكن، كما ذكرنا في الفصل الثامن، بما أننا قد أثبتنا أنه لكل جسيم في النظام يكون الشغل المبذول على الجسيم مساويًا للتغير في طاقة حركته، فسوف تطبق نظرية الشغل والطاقة على النظام ككل، علمًا بأن القوى الداخلية ليس لها إسهام في الشغل الكلي. ومن الأساسي افتراض أن النظام جسم جاسئ؛ لأن القوى الداخلية عادة سوف تبذل شغلًا إذا تغيرت الأبعاد بين الجسيمات.

اعتبر زوجًا من الجسيمات موضعهما (بالنسبة لمحاور اختيارية) في لحظة ما هما $\vec{r}_i$ و$\vec{r}_j$، وبعد قليل يكونان $\vec{r}_i + \Delta\vec{r}_i$ و$\vec{r}_j + \Delta\vec{r}_j$. المتجه من i إلى j هو $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ ومربع البعد بين الجسمين هو $\vec{r}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}$. إذا كان الجسم جاسئًا، فإن المسافات بين الجسيمات لا تتغير، وهكذا يكون (خلال المرتبة الأولى في الكميات الصغيرة) $\vec{r}_{ij} \cdot \Delta\vec{r}_{ij} = 0$؛ حيث $\Delta\vec{r}_{ij} = \Delta\vec{r}_j - \Delta\vec{r}_i$. إذا كانت القوة التي تبذلها i على j هي $\vec{f}_{ij}$ (القوة التي تبذلها j على i هي $-\vec{f}_{ij}$) فإن الشغل الذي تبذله i على j يكون $\vec{f}_{ij} \cdot \Delta\vec{r}_j$ والشغل الذي تبذله j على i يكون $-\vec{f}_{ij} \cdot \Delta\vec{r}_i$، ويصبح حاصل جمع الشغلين هو $\vec{f}_{ij} \cdot \Delta\vec{r}_{ij}$. سوف يكون هذا الضرب القياسي صفرًا إذا كانت $\vec{f}_{ij}$ موازية في اتجاه أو عكس اتجاه $\vec{r}_{ij}$؛ أي إذا كانت القوى مركزية. القوى الوحيدة غير المركزية هي تلك التي بين تيارات ثابتة (أي شحنات متحركة) في المادة. القوة المغناطيسية المؤثرة على شحنة متحركة تكون دائمًا عمودية على سرعة الشحنة، ومن ثم لا تبذل شغلًا [هذا الجزء من التبرير لا يتطلب أن يكون الجسم جاسئًا].

خلاصة: تنطبق نظرية الشغل والطاقة على الجسم الجاسئ حين تسهم قوى خارجية فقط تُسهم في الشغل.

(٣) ملحق (ج)

(٣-١) إثبات أن القوة كمية متجهة

كثيرًا ما يؤكَّد على الحقيقة التجريبية بأن القوة متجه. وهذا صحيح في واقع الأمر؛ لأنه بما أن $\vec{F} = m\vec{a}$، فإن $\vec{F}$ يجب أن تكون متجهًا؛ لأن $\vec{a}$ متجه بالتأكيد. تذكر أننا في الفصل الثاني عرَّفنا $\vec{F}$ بالاستقلال عن الحركة، ووحدة القوة هي الدفع أو السحب المبذول بواسطة جسم عياري ما (الفأر). الفريق المكون من n فأرًا يسحب في اتجاه معين كان ممثَّلًا بسهم طوله n يشير في ذلك الاتجاه (انظر شكل ٢-١ الذي أعدنا رسمه هنا). إذا أدخلنا المحورين x وy اللذين يصنعان زاويتين θ و$90° - \theta$ مع اتجاه السحب الذي تقوم به الفئران، فهل نحتاج إلى إجراء تجربة توضح أن فريق الفئران n يكافئ فريقين: $n\cos\theta$ فأرًا يسحب بطول المحور x و$n\sin\theta$ فأرًا يسحب بطول المحور y؟

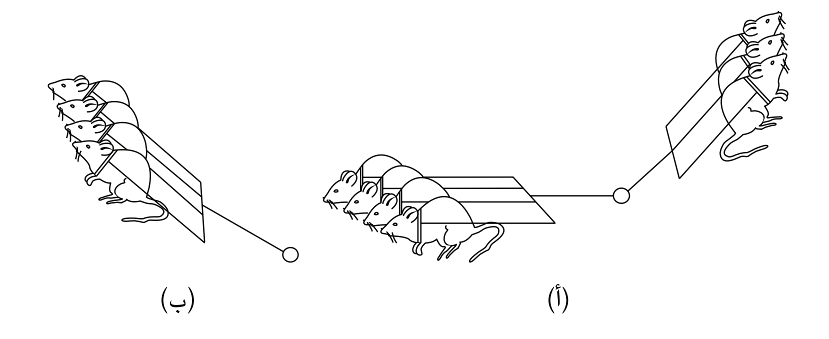
أزعم أننا نستطيع إثبات هذا بالفكر البحت.

افترض $0 \le \theta \le 90°$؛ أي إن الفريق يسحب في الربع الأول. أنا أعتبر أنه من الواضح أن مباراة شدِّ الحبل سوف تنتهي بالتعادل إذا كانت مجموعتان مناسبتان (n_1, n_2) من الفئران تسحبان في الاتجاهين السالبين على طول المحورين x وy. إذا أريد «برهان» ذلك، فمن الواضح أن النسبة n_1/n_2 كلما تغيرت سوف يتغير معها اتجاه الشدِّ المحصِّل نتيجة لتغير الفريقين على المحورين، وسيكونان في عكس اتجاه الشد الذي يقوم به الفريق n عندما تأخذ النسبة قيمتها «الصحيحة». عندئذ، بضرب n_1 وn_2 في نفس المعامل فإنه يمكن ضبط مقدار الشد المحصِّل بحيث يلاشي الشد الذي يقوم به الفريق n.

والآن إذا سمحنا للفريقين n_1 وn_2 بأن يسحبا في الاتجاهين بطول المحورين x وy، فإننا نستطيع القول بأن زوج الفريقين يكافئ الفريق الأصلي المكون من n فأرًا. فضلًا عن ذلك:

$$n_1 = nf(\theta), \qquad n_2 = nf\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right). \tag{C-1}$$

حقيقة أن n_1 وn_2 يتناسبان مع n تنتج من حقيقة أنه إذا كان التعادل هو نتيجة شد الحبل الثلاثي، وتضرب كل الفرق في معامل ما، فلا تزال النتيجة هي التعادل.



شكل ١٣: فريقان من الفئران متصلان بنفس النقطة على نفس الجسم (شكل (أ) بالأعلى). يتكون أحد الفريقين من N_1 فأرًا يشدُّ في نفس الاتجاه الممثل بالمتجه $\vec{N}_1$، والفريق الآخر يتكون من N_2 فأرًا يشدُّ في نفس الاتجاه الممثل بالمتجه $\vec{N}_2$. هل من الواضح أن فريقَي الفئران يكافئان فريقًا واحدًا (شكل (ب))، حيث اتجاه الفريق المفرد هو اتجاه المتجه $\vec{N}_1 + \vec{N}_2$ وعدد الفئران في الفريق هو مقدار المتجه $\vec{N}_1 + \vec{N}_2$؟

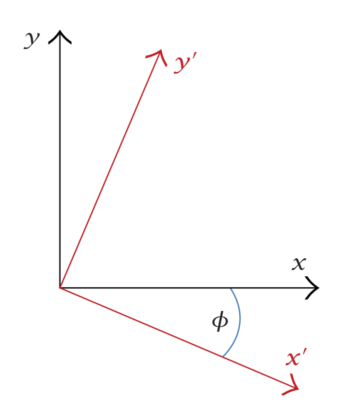
وحيث إن جميع الاتجاهات متكافئة في المكان، فإن نفس دالة الزاوية بين الفريق n ومحور ما يجب أن تدخل في المعادلتين للفريقين n_1 وn_2. لاحظ أننا نستخدم المقياس الدائري لأنه الأنسب.

القيد المهم على الدالة $f(\theta)$ هو التناسقية. افترض أننا نستخدم فئة المحورين (x وy)، وأنك تستخدم فئة محورين أخرى (x' وy') بنفس نقطة الأصل مثلنا، ولكنَّ محوريك يدوران مع عقارب الساعة (خلال زاوية ϕ) بالنسبة لمحورينا (انظر شكل ١٤). يمكن استبدال الفريق n بأن يحل محله $n_1 = nf(\theta)$ فأرًا على محورنا x و$n_2 = nf(\pi/2 - \theta)$ فأرًا على محورنا y، أو يحل محله بالتساوي تمامًا $n_1' = nf(\theta + \phi)$ فأرًا على محورك x' و$n_2' = nf(\pi/2 - \theta - \phi)$ فأرًا على محورك y'. لكن الفئران التي على محورينا يمكن أن يحل محلها أعداد مناسبة من الفئران على محوريك (والعكس بالعكس). عندئذ يمكن استبدال $nf(\theta)$ فأرًا على محورينا بأن يحل محلها $nf(\theta)f(\phi)$ على محورك x' و$nf(\theta)f(\pi/2 - \phi)$ فأرًا على محورك y'. بالمثل، يمكن استبدال $nf(\pi/2 - \theta)$ فأرًا على محورك y بأن يحل محلها $nf(\pi/2 - \theta)f(\pi/2 + \phi)$ فأرًا على محورك x' و$nf(\pi/2 - \theta)f(-\phi)$ فأرًا على

محورك y'. عدد الفئران على محورك x' يجب أن يكون هو نفسه بغض النظر عما إذا كان الإحلال قد تم على مرحلة واحدة أو مرحلتين؛ أي إن

$$f(\theta+\phi)=f(\theta)\,f(\phi)+f\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)f\left(\frac{\pi}{2}+\phi\right). \tag{C-2}$$

النص المناظر للمحور y' لا يضيف أي معلومة جديدة.



شكل ١٤: فئتان من المحاور، إحداهما تدور بالنسبة للأخرى.

نعلم بعض الحقائق الإضافية عن $f(\theta)$: $f(0)=1$، $f(\pi/2)=0$. فضلًا عن ذلك، عند مقارنة الحالتين عندما يكون الفريق n في الربع الأيمن الأعلى للساعة، وعندما يكون الفريق n في الربع الأيمن الأسفل، نرى أن $f(\theta)=f(-\theta)$ و$f(\pi/2-\theta)=-f(\pi/2+\theta)$.

نفاضل المعادلة (C-2) مرتين بالنسبة إلى ϕ، ثم نضع ϕ تساوي صفرًا. نستخدم الرمز شرطتين ($''$) ليرمز إلى المشتقة الثانية. وبما أن $f(\pi/2-\theta)=-f(\pi/2+\theta)$، فإنه ينتج أن $f''(\pi/2)=0$، ونحصل على:

$$f''(\theta)=f''(0)\,f(\theta). \tag{C-3}$$

هذه المعادلة التفاضلية مألوفة لنا في سياق مناقشتنا للذبذبات التوافقية. إذا كان $f''(0) > 0$ (في تلك الحالة ليكن $f''(0) = a^2$)، فإن الحل الأكثر عمومية للمعادلة (C-3) يكون $f(\theta) = A\exp(a\theta) + B\exp(-a\theta)$. ولكي يكون $f(\theta) = f(-\theta)$ يجب أن يكون $A = B$، ولكي يكون $f(0) = 1$ يجب أن يكون لدينا $A = B = 1/2$. لكن عندئذ سوف يكون من المستحيل استيفاء $f(\pi/2) = 0$.

وبهذا نستخلص أن $f''(0) < 0$، وليكن $f''(0) = -b^2$. الحل الأكثر عمومية للمعادلة (C-3) يكون عندئذ $f(\theta) = A\cos b\theta + B\sin b\theta$. ولكي يكون $f(\theta) = f(-\theta)$ و$f(0) = 1$ يجب أن يكون لدينا $A = 1$ و$B = 0$. ولكي يكون $f(\pi/2) = 0$ يجب أن يكون لدينا $b = 1, 3, 5, \ldots$. المضاعفات الفردية الأكبر من الواحد يمكن حذفها حسب المتطلب الواضح (بدون شك!) بأن $f(\theta) \geq 0$ لكل $0 \leq \theta \leq \pi/2$. وبناءً على هذا يكون $f(\theta) = \cos\theta$، مما يثبت أن القوة لها جميع خصائص المتجه. وعلى وجه الخصوص، إذا أثر فريقان (كلٌّ منهما ممثَّل بسهم) بشدٍّ على نفس النقطة، فإنهما يكونان مكافئين لفريق مفرد ممثَّل بسهم عبارة عن حاصل الجمع المتجهي للسهمين.

(٤) ملحق (د)

(٤-١) التكافؤ بين عجلة المحاور وقوة التثاقل (الجاذبية) الاحتكاكية

نقدم هنا برهانًا على إضافة قوة جاذبية احتكاكية لتفسير حركة جسيم في إطار غير قصوري عندما يمكن تعيين عجلة الإطار بالنسبة لإطار قصوري.

برهان. إذا كانت محاور الإطار القصوري هي $\hat{i}\,\hat{j}\,\hat{k}$ والمحاور المتصلة بصندوق (متسارع) هي $\hat{i}'\,\hat{j}'\,\hat{k}'$، وكانت المحاور المميزة بشرطة غير دوارة بالنسبة للمحاور التي بدون شرطة ولها عجلة (تسارع) $\vec{A}$ بالنسبة للمحاور التي بدون شرطة، فإن الجسيم الذي له عجلة $\vec{a}'$ بالنسبة للمحاور المميزة بشرطة تكون عجلته $\vec{a}' + \vec{A}$ بالنسبة للإطار القصوري. معادلة حركة الجسيم هي $\vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{A})$؛ حيث $\vec{F}$ هي القوة الكلية المؤثرة على الجسيم. يمكننا إعادة كتابة هذه المعادلة على الصورة $\vec{F}' = m\vec{a}'$؛ حيث $\vec{F}'$ هي حاصل جمع القوة الحقيقية $\vec{F}$ والقوة الاحتكاكية $-m\vec{A}$. وهو المطلوب إثباته. □

(٥) ملحق (هـ)

(٥-١) تنمية قدراتك لحل المسائل: مفيد (؟) اقتراحات

حوار: ط = طالب م = معلِّم أو أستاذ

ط: إنني أفهم المبادئ، لكنني أجد صعوبة في التعامل مع العديد من المسائل. هل توجد طريق منهجية، شيء ما مثل برنامج حاسوب أو مجموعة قواعد، للتعامل مع مسألة ما وحلِّها بدون الدخول في أنفاق مسدودة؟ إنك عندما تحل مسألة ما على السبورة تسلك طريقًا مباشرًا من المسألة إلى الحل، وفي كل مرحلة تبدو كأنك عليم بالمبدأ المتصل بالموضوع، وبكيفية تحويل المبدأ إلى معادلة مفيدة. هل عليَّ أن أحلَّ ألف مسألة وأقع في آلاف الأخطاء قبل أن أصبح بارعًا في الوصول إلى هذه الطريقة المباشرة؟

م: بالقطع تلك ستكون فكرة جيدة إذا كان لديك ما يكفي من الوقت والصبر، لكنك لن تصبح بعدُ ماهرًا وخبيرًا ما لم تتعلم من أخطائك. على سبيل التقريب (وبإغفال مناقشة بعض العوائق المربكة مثل الأخطاء الحسابية وعدم معرفة الفرق بين الجيب وجيب التمام)، هناك نوعان من الأخطاء: أخطاء مرتكَبة، وأخطاء إهمال. وإعداد قائمة تشمل فقط الأخطاء المهمة (التعليمية والتثقيفية) يحتاج إلى مجلد ضخم.

من أمثلة الأخطاء المرتكبة أن تكتب $\vec{F} = m\vec{a}$ في إطار غير قصوري (مُنافٍ للقانون)، (مثل قياس $\vec{a}$ بالنسبة إلى محاور متصلة بدوامة دوارة)، أو، عند وصف حركة بندول، أو استخدام معادلات كينماتيكية قابلة للتطبيق فقط على حركة جسم ما بعجلة منتظمة. أما خطأ الإهمال فهو إغفال معادلة مفيدة للقوة أو العزم، أو إهمال معلومة كينماتيكية مهمة، مثل العلاقة بين سرعات أجزاء مختلفة في نظام بكرات. في أي من هذه الحالات سوف يزيد عدد الكميات المجهولة عن عدد المعادلات.

ط: حسنًا، إنك في الحقيقة لم تخبرني بكيفية تحسين خبرتي ومهاراتي، اللهم إلا عن طريق مراقبة حلولك الأنيقة على السبورة.

م: لتكن كذلك إذا جاز التعبير، لقد علَّمْتني شيئًا ما عن الكيفية التي أدرِّس بها. ربما عليَّ أن أردَّ الجائزة التي حصلت عليها في التدريس، فلعلها استندت إلى توصية من قريب لي، بالإضافة إلى مهارتي في سرعة حل مسائل الميكانيكا للمبتدئين. من الواضح أنني لم أبيِّن لك بالقدر الكافي كيف أنظِّم تفكيري عن مسألة ما قبل أن أدوِّن أي

معادلات. بالطبع، الخبرة بمسائل مماثلة تكون عملًا مساعدًا، لكني أعتقد أنه يوجد شيء ما ينبغي تعلُّمه.

قبل أن تدون أي معادلات، عليك أن تدرك عدد الكميات المجهولة الموجودة في المسألة، وأن يكون لديك برنامج واضح لوضع فئة من المعادلات المبنية على قوانين نيوتن و/أو القيود الكينماتيكية الكافية لتعيين تلك الكميات. ربما يكون من المفيد أن تسجل قائمة دقيقة لخطوات البرنامج، أو بالخبرة، تحتفظ في ذهنك بالبرامج. طبعًا قد يكون لديك عدة برامج محددة، وإذا كان الوقت يسمح، فعليك أن تنفذها. إذا لم تُفضِ جميعها إلى نفس النتيجة يكون من المهم التعرف على الخطأ (أو الأخطاء). ولسوف يتحقق التعلُّم بكل تأكيد.

ط: يبدو أنك قد بذلت معظم الجهد في الإقناع.

م: ذلك مجال اختصاصي، لكن عليك أن تبذل معظم الجهد في التفكير.

مراجع

تمهيد

(1) Isaac Newton, *Principia Mathematica*, Running Press Book Publishers, 125 South Twenty-second Street, Philadelphia, PA 19103-4399, 2002.

الفصل الثاني: قانونا نيوتن الأول والثالث: استاتيكا الجسيمات

(1) Isaac Newton, *Principia Mathematica, edited, with commentary by Stephen Hawking*, Google Books reference, available at http://books.google.com/books.

الفصل الثالث: قانون نيوتن الثاني: ديناميكا الجسيمات

(1) Isaac Newton, *Principia Mathematica, edited, with commentary by Stephen Hawking*, Google Books reference, available at http://books.google.com/books.

(2) Gerald Holton and Stephen G. Brush, *From copernicus to einstein and beyond,* Addison-Wesley, Rutgers University Press, Piscataway, NJ, 2001.

(3) Randall K. Noon, *Forensic engineering investigation*, CRC Press LLC, 2000 N.W. Corporate Blvd, Boca Raton, FL 33431, 2001.

(4) Paul Valéry, *Regards sur le monde actuel et autres essais,* Paris: Gallimard, 5, rue Gaston-Gallimard, 75328 Paris cedex 07, 1945.

(5) NASA Staff, *Solar system exploration — earth's moon: Facts & figures*, Retrieved 2012-09-29.

(6) A. Stanley Mackenzie Ph.D., *The laws of gravitation: Memoirs by newton, bouguer and cavendish,* American Book Company, PO Box 2638, Woodstock, GA 20188-1383, 1900.

(7) P. J. Mohr, B. N. Taylor, and D. B. Newell, *The 2010 codata recommended values of the fundamental physical constants,* National Insitute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899.

(8) Isaac Newton, *Principia Mathematica*, Running Press Book Publishers, 125 South Twenty-second Street, Philadelphia, PA 19103-4399, 2002.

(9) S. Aoki, B. Guinot, G. H. Kaplan, H. Kinoshita, D. D. McCarthy, and P. K. Seidelmann, *The new definition of universal time,* Astronomy and Astrophysics 105(2) (1982), 361.

الفصل الخامس: الشغل والطاقة

(1) National Institute of Standards and Technology, *Digital library of mathematical functions,* Cambridge University Press, UPH, Shaftesbury Road, Cambridge, CB2 8BS, United Kingdom, 2010.

(2) National Institute of Standards and Technology, *Digital library of mathematical functions*, Cambridge University Press, UPH, Shaftesbury Road, Cambridge, CB2 8BS, United Kingdom, 2010.